


ELEYANG DESIGN

*La Vita E Bella*





Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p><b>§ 基本理论框架</b></p>	<p>• [Theorem 1] 理论框架:            宇宙学原理: 宇宙在大尺度上是均匀、各向同性的;            Einstein 广义相对论: 引力场方程的史瓦西解, 物质场方程是爱因斯坦方程</p> <p>• [Def 2] Metric 度规</p> <p>(i) 二维平面 <math>(dx^1, dx^2)</math>: <math>ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu</math>  <math>\Rightarrow</math> 度规张量 <math>g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>(ii) 极坐标: <math>x^1 = r \cos\theta</math>, <math>x^2 = r \sin\theta</math>, <math>ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2</math>  <math>\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; r^2 \end{pmatrix}</math></p> <p>(iii) 三维球面: <math>x^1 + x^2 + x^3 = R^2</math>, <math>dr^2 = R^2 \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 \right]</math>  <math>\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{1-r^2} &amp; 0 \\ 0 &amp; R^2 r^2 \end{pmatrix}</math></p> <p>• [Prop 3] 四维时空度规: <math>ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu</math>            在平坦时空下 (<math>c=1</math>): <math>ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2</math>  <math>\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; -1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; -1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p> <p>• [Prop 3] Robertson-Walker 度规            在宇宙学原理的前提下, 四维时空度规为: <math>ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]</math>  <math>a(t)</math>: 宇宙尺度因子, <math>k</math>: 空间曲率 (<math>r, \theta, \phi</math>), 共动坐标 (不随宇宙膨胀变化)</p> <p>固有时隔: <math>dp = a(t) \int_0^r \frac{dr}{1-kr^2}</math>  <math>\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} \int_0^r \frac{dr}{1-kr^2} = \frac{\dot{a}}{a} dp</math>  <math>\Rightarrow H(t) = \frac{\dot{a}}{a}</math></p> <p>• [Def 3] <math>\lambda_0</math> 为观测波长, <math>\lambda_e</math> 为发射波长, 红移 <math>z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}</math>, <math>1+z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}</math>            红移与宇宙膨胀时与接收时的时空变化</p>	
<p><b>§ 宇宙动力学</b></p>	<p>• [Theorem 3] 宇宙动力学: 假设宇宙包含若干种不同性质的物质</p> <p><math>\rho_i</math>: <math>i</math> 种物质的质量, <math>p_i</math>: <math>i</math> 种物质的压强  <math>ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]</math>            由 Einstein 的方程: <math>\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_i \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_i + 3p_i) \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Friedmann 方程}</math>  <math>\Rightarrow</math> 能量守恒方程: <math>\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0</math></p> <p>[Prop 4] 假设宇宙物质总方程为 <math>p = w\rho</math>, 则 <math>\rho \propto a^{-3(1+w)}</math></p> <p>(i) 辐射 (相对论物质): <math>p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \rho \propto a^{-4}</math>            (ii) 非相对论物质: <math>p = 0 \Rightarrow \rho \propto a^{-3}</math>            (iii) 真空: <math>p = -\rho \Rightarrow \rho = \text{const}</math>            (iv) 暗能量: <math>p = w\rho \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}</math>, <math>w &lt; -\frac{1}{3}</math></p> <p>• [Def 4] 定义 <math>\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}</math>, <math>\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}</math>, <math>H = \frac{\dot{a}}{a}</math> 分别为宇宙的密度参数, 临界密度, Hubble 常数</p>	

由 Friedmann 方程化为:  $1 + \frac{h}{a^2 H^2} = \Sigma \Omega_i = \Omega_{total}$

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rho_m \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rho_\Lambda \quad \Omega_r \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rho_r \quad \Omega_k \equiv -\frac{h}{a^2 H^2}$$

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r + \Omega_k = 0$$

$$\text{if } \Omega_{total} > 1 \quad k > 0 \quad \text{if } \Omega_{total} = 1 \quad k = 0 \quad \text{if } \Omega_{total} < 1 \quad k < 0$$

$$\text{if } \rho_0 = 1.879 \times 10^{-27} \text{ g cm}^{-3} \quad h = 0.7$$

[Remark] 减速因子  $q = -\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} \Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda < 0$

[Remark] if  $\dot{a} > 0$ , then  $\Sigma(\rho_i + 3p_i) < 0 \Rightarrow$  宇宙膨胀

### 5. 宇宙学年代

[Prop] 假设现在  $a = 1, \dot{a} = 0, \ddot{a} < 0$  时  $a = 0, \dot{a} = 0$

$$1 + \Sigma \frac{\rho_i}{3H^2} = \dot{a}^2 = -\frac{2\dot{a}}{a^3} \dot{a} a^2 \dot{a} = - (1+2q) H a^2 \dot{a}$$

$$\text{if } \dot{a} > 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{da}{H a^2 (1+2q)}$$

[Prop] 对 Hubble, 由 Friedmann 方程  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} (\rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{h}{a^2}$

$$\Omega_{m0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rho_{m0} \quad \Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rho_{\Lambda 0} \quad \Omega_k \equiv -\frac{h}{a_0^2 H_0^2}$$

$$\text{if } H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2}$$

### 5. 宇宙学距离

[Prop] 光信号的径向传播  $ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 = a^2 dz^2 \Rightarrow \frac{dt}{a} = dz$

$$\text{if } \int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{a H(z)} = - \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\text{由 } a \dot{a} = \dot{a} a^2 \dot{a} = \dot{a}^2 a$$

$$\text{if } \int_0^1 \frac{dz}{H(z)} = a_0 \int_0^1 \frac{dr}{|1-Hr^2|} \quad dr = a(z) dz \quad \text{if } \rightarrow \text{测地距离}$$

[Prop]  $d_L^2 = \frac{h}{8\pi G P}$   $\text{if } \rightarrow$  光度距离



如明列: 假设观测者  $d_A$  所由面积比例  $\frac{dA}{4\pi a^2(z) r^2}$

$$\text{且知 } L = \frac{N(z) h\nu}{4\pi a^2(z) r^2} \quad \text{接收的 } N' = N \frac{dA}{4\pi a^2(z) r^2}$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+z} \quad \delta L = (1+z) \delta L$$

$$\text{则 } F = \frac{N' h\nu'}{4\pi a^2(z) r^2} = \frac{1}{4\pi a^2(z) r^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{N(z) h\nu}{4\pi}$$

$$\text{if } \rightarrow d_L = a(z) r \sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{h\nu}{4\pi} \frac{c(1+z)}{4\pi} \int_0^1 \frac{dz}{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$$

[Remark]  $d_L \equiv \frac{D}{\delta} = d_L (1+z)^{-2} \Rightarrow$  角直径距离



Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /
<p>5. 不同红移的物质位置</p>	<p>• Prop3 Hubble 参数 <math>H^2(z) = \frac{H_0^2}{3} \left( \Omega_m \frac{a^3}{a_0} + \Omega_k \frac{a^2}{a_0} + \Omega_\Lambda \right) = \frac{H^2}{a^2}</math>          有壳物质 + 真空宇宙  <math>\Omega_m(z) = \frac{\rho_m(z)}{\rho_c(z)} = \frac{\rho_m(z) a^3}{3 H(z)^2 a^3} = \frac{\rho_m(z)}{3 H(z)^2 a^3}</math>    <math>\Omega_\Lambda(z) = \frac{\rho_\Lambda(z)}{\rho_c(z)} = \Omega_{\Lambda 0} \frac{1}{(H(z)/H_0)^2}</math>  <math>\Omega_{\text{total}}(z) = 1 = \frac{H^2}{a^2 H_0^2} \frac{1}{H^2} \rightarrow 1 = \frac{H^2}{a^2 H_0^2}</math>          则计算 <math>a(z) \sim \Omega(z)</math>, when <math>1 \ll \Omega(z) \ll 100 \rightarrow 1 \ll \Omega(z) \ll 100^{-2}</math>  <math>1 \ll 10^{-2} \ll 100 \rightarrow 1 \ll \Omega(z) \ll 100^{-2}</math></p>	
<p>6. 视界</p>	<p>• Prop3 不同物质成分的演化函数: <math>\rho_m \propto (1+z)^{-3}</math>    <math>\rho_r \propto (1+z)^{-4}</math>    <math>\rho_\Lambda = \text{const}</math></p> <p>• Def3 <math>r = r_0</math> 的球是个无法到达它的边界, <math>d_H</math> 称为视界          在 <math>r_0</math> 处 <math>t = 0</math> 发出的光, 在 <math>t = t_0</math> 时达到 <math>r = 0</math>, 则  <math>ds^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 = a^2 dz^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} = c</math>  <math>\Rightarrow \int_0^{r_0} \frac{c dt}{a(t)} = \int_0^{t_0} \frac{dr}{a(t)}</math></p> <p>则 <math>d_H</math> 定义为从此刻到视界时的固有距离 <math>d_H(t_0) = c a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}</math>          考虑 <math>t = z \Rightarrow \frac{dr}{dt} = c \Rightarrow d_H(z) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}</math></p> <p>• Prop3 对 <math>z = 1000</math> 宇宙尺度为 <math>\Omega_m = 1</math>    <math>\Rightarrow d_H(z) = \frac{c}{H_0} (1+z)^{-2} \frac{1}{H(z)}</math>  <math>d_H(z=1000) \sim 10^{-6} d_H(z=0)</math>    即 <math>z = 1000</math> 时的固有视界  <math>\Omega = 1</math> 是初始值: <math>D_H(z=0) = z_H = 1000 \Rightarrow z = 1+z \Rightarrow d_H(z_H=1000) \sim 0.05 d_H(z=0)</math>  <math>z = 1000</math> 时 视界尺度与今天视界尺度为 0.05 倍</p>	
Summary 总结		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p><b>§. Recall</b></p>	<p>• [Theorem] Friedmann Equations</p> $\begin{cases} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} = \frac{2H_0}{3} \Omega_p \\ \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2H_0}{3} \Omega_p (1 + \beta \gamma) \end{cases}$ <p>• [Theorem] Robertson-Walker 度规 <math>ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]</math></p> <p>• [Def] 定义 <math>\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}</math>, <math>\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}</math> 临界密度, <math>H = \frac{\dot{a}}{a}</math> Hubble 常数  <math>\Omega \rightarrow</math> 物质的 <math>\Omega_M</math>, 辐射的 <math>\Omega_R</math>, 暗物质的 <math>\Omega_\Lambda</math>  <math>\Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda + \Omega_k</math>  <math>H(t) = \frac{H_0}{a} \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R + \Omega_\Lambda(1+z)^4}</math></p>	
<p><b>§. 宇宙学模型</b></p>	<p># The Empty Universe (Curvature-dominated)</p> $\Omega_M = \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0, \quad \Omega_k = 1$ $\rightarrow \text{F.E. } \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2} \quad \rightarrow \Omega_k = \frac{H_0^2}{a^2 H^2} = 1, \quad k \neq 0$ <p>In this case, the universal expanding are neither decelerated nor accelerated</p> <p># Radiation-dominated Universe</p> $\Omega_M = \Omega_R = \Omega_\Lambda = 0, \quad \Omega_R = 1$ $\rightarrow \text{F.E. } \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_R, \quad \rho_R = \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ $\rightarrow \int \frac{da}{a} = \int \sqrt{8\pi G \rho_{R0}} a^{-2} da$ $\rightarrow \Delta t(z) = a_0 \int \frac{dz}{c H_0 (1+z)^{3/2}} \quad \text{As } t_{R0} = (32\pi G \rho_{R0}/3)^{-1/2} = \frac{H_0^{-1}}{2}$ $\rho_R(t) = \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ <p># Matter-dominated Universe</p> $\Omega_R = \Omega_\Lambda = 0, \quad \Omega_M + \Omega_k = 1$ $\rightarrow \text{F.E. } \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_M - \frac{kc^2}{a^2}$	
	<p># OCDM</p> <p>Assumption: <math>0 &lt; \Omega_M &lt; 1, \quad \Omega_\Lambda = 0, \quad 0 &lt; \Omega_k = 1 - \Omega_M &lt; 1</math>  <math>k = -1 \rightarrow</math> global geometry is open  F.E. <math>\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_M + \frac{c^2}{a^2}</math>  In this case, the universe of low density will expand forever</p>	
	<p># The Closed Universe</p> <p>Assumption: <math>\Omega_M + \Omega_R &gt; 0, \quad \Omega_M + \Omega_k &gt; 1, \quad \Omega_M &gt; 1, \quad \Omega_k &lt; 0</math>  <math>k = 1 \rightarrow</math> closed  F.E. <math>\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_M - \frac{c^2}{a^2}</math>  Solution: <math>\Delta t(z) = a_0 \frac{\Omega_M}{2(1-\Omega_M)} (\cos \eta - 1)</math> <math>\eta = \frac{\Omega_M}{2\Omega_M(1-\Omega_M)^{3/2}} (1+z) - \text{sing}</math>  max when <math>\eta = \pi</math></p>	
	<p># SCDM</p> <p>Assumption: <math>\Omega_M &lt; 1, \quad \Omega_\Lambda + \Omega_R = 0</math>  F.E. <math>\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_M</math>  Solution: <math>\Delta t(z) = a_0 \int \frac{dz}{c H_0 (1+z)^{3/2}}</math></p>	<p># de Sitter Universe</p> <p>F.E. <math>\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{c^2 \Lambda^2}{3} = \frac{H_0^2}{\Omega_\Lambda}</math>  Solution: <math>\Delta t(z) = \begin{cases} \frac{c}{H_0} \sinh(H_0 t) &amp; k = -1 \\ \frac{c}{H_0} \cosh(H_0 t) &amp; k = 0 \\ \frac{c}{H_0} \exp(H_0 t) &amp; k = 0 \end{cases}</math></p>

### §. $\Lambda$ CDM Universe

• [Prop] Considering both matter & cosmological constant

$$\frac{\dot{a}}{a^3} = H_0^2 [\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda] \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 [\Omega_m a^4 + \Omega_\Lambda a^6]$$

$$\Leftrightarrow \text{Modt} = \frac{dt}{da} = \frac{da}{H_0 \sqrt{\Omega_m a^4 + \Omega_\Lambda a^6}}$$

$$\text{Solution: } a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}}{2} t\right)$$

via §.1 matter dominated

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left(\frac{3H_0 \Omega_m}{2}\right)^{2/3} t^{2/3}$$

via §.7 cosmological constant recovered

$$a(t) \propto \left[\exp\left(\frac{3H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}}{2} t\right)\right]^{2/3}$$

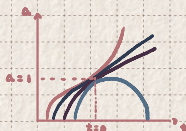
[Prop]  $\Lambda$  vs Radiation:  $\frac{\dot{a}}{a^4} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r) = \frac{2}{3} H_0^2$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_r, \quad \Omega_\Lambda = \frac{2}{\Omega_m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\Omega_m/\Omega_r)}{dt} = H_0 \left[1 - \Omega_m - \Omega_r + \Omega_m \Omega_r (2 + \Omega_m) \Omega_r\right]$$

### §. wrap up

• [Prop]  $\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_r = 1$



■ :  $\Omega_m = 0, \quad \Omega_\Lambda = 0$

■ :  $\Omega_m = 1, \quad \Omega_\Lambda = 0$

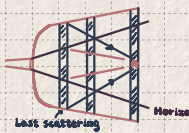



■ :  $\Omega_m = 0.5, \quad \Omega_\Lambda = 0.5$

■ :  $\Omega_m = 0.3, \quad \Omega_\Lambda = 0.7$

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p>5. Univers's Epochs</p>	<p>• [Prop 1] <math>t=0</math> The Big Bang</p> <p>↓</p> <p>[Prop 2] <math>0 &lt; t &lt; 10^{-43}</math> s The Planck Epoch              此时引力量子效应显著              由物理常数「c, G, h」得 <math>t_p = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}</math> ← shortest possible time interval</p> <p>↓</p> <p>[Prop 3] <math>10^{-43}</math> s <math>&lt; t &lt; 10^{-36}</math> s Grand Unification Epoch  <math>T \sim 10^{32}</math> K 引力 + electromagnetic forces (电磁力 + 强力)</p> <p>↓</p> <p>[Prop 4] <math>10^{-36}</math> s <math>&lt; t &lt; 10^{-32}</math> s Inflationary Epoch              指数膨胀 引力 + 强力 ← electromagnetic interaction</p> <p>↓</p> <p>[Prop 5] <math>10^{-32}</math> s <math>&lt; t &lt; 10^{-12}</math> s Electroweak Epoch  <math>T \sim 10^{16}</math> K 引力 + 强力 + electromagnetic interaction</p> <p>↓</p> <p>[Prop 6] <math>10^{-12}</math> s <math>&lt; t &lt; 10^{-6}</math> s Quark Epoch              引力 + 强力 + 强力 + 电磁力 T 太高 quarks 无法合成 hadrons</p> <p>↓</p> <p>[Prop 7] <math>10^{-6}</math> s <math>&lt; t &lt; 1</math> s Hadron Epoch              质子生成 quarks → hadrons</p> <p>↓</p> <p>[Prop 8] <math>1</math> s <math>&lt; t &lt; 3</math> min Lepton Epoch              lepton/anti-lepton pairs → 正反湮灭              剩余额 leptons: <math>e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau</math></p>	
<p>6. 暴胀宇宙学</p>	<p>• [Prop] 针对 <math>\Lambda</math>CDM 中的 <math>\omega_0</math> 平坦性问题 (1) 视界问题 视比暴胀宇宙学              (2) 视界: 对于 <math>r \rightarrow d_H</math> 则原至今未观测到信号 <math>d_H</math> 为原点到视界面的固有距离  <math>d_H(t_2) = -c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{a(t')}</math> <math>\rightarrow d_H(t_2) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}</math>              膨胀后 <math>D_H = (1+z)d_H</math></p> <p>• [Theorem] Inflation 宇宙极早期存在暴胀  <math>t \sim 10^{-36}</math> s 相互性破坏 - 高度对称 <math>\rightarrow t \sim 10^{-32}</math> s 强力分离 <math>\rightarrow</math> 相变 + 对称性破坏</p>  <p>(1) 平坦性问题: <math>1 - \frac{\Omega}{3} = \frac{2k}{9H_0^2 a^2} \approx \frac{1}{\mu^2}</math>              早期辐射为主 <math>\rho a^4 = \text{const}</math> <math>\rightarrow 1 - \frac{\Omega}{3} = \frac{1}{\mu^2} \propto a^2 \propto t</math>  <math>1/\mu = 1.1 \times 10^{-60}</math> <math>\ln(\mu) = 3.60</math> <math>H_0 \approx 60</math></p>	
<p>Summary 总结</p>		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录																									
§ 质子和电子	<p>• [Prop1] 当温度足够低时 质子和电子结合成元素</p> <p>1. 假设 <math>t = 10^{-3} s</math>, <math>T \sim 10 MeV</math> 记质子和电子数密度 <math>n_p, n_e, n_n</math>              满足平衡分布时 <math>\frac{n_p}{n_e} = e^{-\frac{m_p}{kT}}</math>, <math>n_n = n_p + n_e</math>  <math>n_p = g_p \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p - m_e}{T}}</math>, <math>n_n = 2 n_p + (A-Z) n_p</math></p> <p>2. 当 <math>T \sim MeV</math> 时 质子和电子结合成中子  <math>\Rightarrow</math> 质子和电子数密度之比 质子和中子数密度之比</p> <p><math>\Gamma_{\nu}</math>: 两种粒子相互作用率 对光子: <math>\frac{dn_{\nu}}{dt} = -\Gamma_{\nu} n_{\nu} + \Gamma_{\nu} n_p - (\Gamma_{\nu} n_{\nu} + \Gamma_{\nu} n_n) n_n</math>              弱相互作用 <math>\Gamma_{\nu} = \left( \frac{10^{10} h^2}{T} \right)^2 g^{-1}</math>              宇宙膨胀 <math>\dot{n} = -\left( \frac{10^{10} h^2}{T} \right)^2 g</math>  <math>\Gamma = H = \frac{1}{2t}</math> 得冻结温度 <math>T = 10^{10-0.02} K</math> 此时 <math>\frac{n_p}{n_e} = e^{-\frac{m_p}{kT}} \sim 0.1</math></p> <p>[Remark1] 此时质子和中子数目之比 对宇宙原初元素合成至关重要</p>																										
§ 光子退耦	<p>• [Def1] 热平衡 对于一个粒子系统 当粒子间相互作用足够频繁时 系统处于平衡状态  <math>\Rightarrow</math> 粒子相互作用时间尺度 <math>\ll</math> 宇宙膨胀的时间尺度</p> <p>对 <math>n_1, n_2</math> 粒子              其相互作用率 <math>\propto n_1 n_2 \propto n^2 \propto a^{-6}</math>              对宇宙膨胀 <math>\dot{n} \sim (dp)^{-1/2} \sim a^{-2}</math> (Radiation-dominated as <math>\rho \sim a^{-4}</math>)</p> <p>• [Prop1] 不同粒子相互作用不强 随着宇宙不断膨胀 粒子在不同时期退耦 (脱离热平衡)</p> <p><math>a</math> 和光子辐射能量密度 <math>\rho_{\nu}(t, T) = \frac{4\pi^2}{15} \frac{1}{a^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}</math>              辐射数密度 <math>n_{\nu}(a, \nu) = \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \Rightarrow n_{\nu} = \int_0^{\infty} \frac{4\pi^2 \nu^2}{15 h^3} d\nu</math></p> <p>• [Prop1] 光子-光子相互作用与其它粒子相互作用 作用率 <math>\Gamma = n \sigma v</math>: <math>n</math>: 靶粒子数密度 <math>\sigma</math>: 相互作用截面 <math>v</math>: 粒子相对速度              退耦的时间尺度 <math>\dot{a} t = \frac{1}{H} = H^{-1}</math> 退耦条件 <math>\Gamma \dot{a} t \ll 1 \Rightarrow</math> 退耦时刻 <math>\Gamma \sim H</math>              对光子 <math>\dot{a} v \ll \sigma v \Rightarrow e^+ e^- \Rightarrow \nu e \Rightarrow \nu e</math>  <math>\sigma = \sigma_T T^2</math>, <math>G_F \sim 10^{-5} GeV^{-2}</math>, <math>v = 1/c</math>, <math>n \sim T^3 \Rightarrow \Gamma = G_F^2 T^5</math>  <math>a \propto t^{1/2}</math>, <math>H = \frac{1}{2t} \propto t^{-2}</math>  <math>\Rightarrow \frac{\Gamma}{H} \propto T^7</math>, <math>T \downarrow</math> 退耦时刻 <math>\sim 1 MeV</math></p>																										
§ 光子退耦	<p>• [Def1] H-Me 反应 <math>He^+ + e^- \leftrightarrow He + \gamma</math>, <math>He^+ + e^- \leftrightarrow He^+ + \gamma</math>, <math>He^+ + e^- \leftrightarrow He + \gamma</math></p> <p>(a) Boltzmann 分布 <math>n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_i}{T}}</math>  <math>g_e = g_p = 2</math>, <math>g_n = 4</math>, <math>n_p + n_e = n_n</math>, <math>n_n = (n_p + n_e) = 3 n_e</math> 电中性的 <math>n_p = n_e</math></p> <p>(b) 冻结电离度 <math>x = \frac{n_e}{n_p + n_n} = \frac{n_e}{1 - 3x} = \frac{n_e}{1 - 3x}</math>              Saha 方程 <math>\frac{n_e n_p}{n_n} = \frac{g_e g_p}{g_n} e^{-\frac{m_e}{T}} = \frac{g_e g_p}{g_n} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e}{T}}</math> 且 <math>n_p = n_e</math>, <math>n = \frac{2613}{4} T^3</math>  <math>\Rightarrow x = \frac{x^2}{1 - 3x} = \frac{e^{-\frac{m_e}{T}}}{1 - 3x} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e}{T}}</math> 光子数与电子数之比 <math>\sim 10^{10}</math>, <math>x = 0.5</math> 时是 <math>T \sim 0.3 eV</math></p> <p>• [Def1] 在辐射与物质退耦 宇宙背景光子自由电子退耦一次函数 <math>\Rightarrow \tau = \int_0^t dt n_e \sigma_T \frac{d\tau}{dt}</math></p>																										
Summary 总结	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>相对数 Density</th> <th>相对数 Fermion</th> <th>非相对论</th> <th>相对论 光子与中微子</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>n</math></td> <td><math>30 \frac{G_{133}}{30} T^3</math></td> <td><math>\frac{3}{4} g_{\nu} \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3</math></td> <td><math>g \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}</math></td> <td><math>n = g_n \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho</math></td> <td><math>30 \frac{G_{133}}{30} T^4</math></td> <td><math>\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{m^4}{30} T^4</math></td> <td><math>m n + \frac{3}{2} n T</math></td> <td><math>g n^2 = g_b + \frac{3}{4} g_f</math></td> </tr> <tr> <td><math>\rho</math></td> <td><math>\frac{\rho}{3}</math></td> <td><math>\frac{\rho}{3}</math></td> <td><math>n T</math></td> <td><math>\rho = g_b \frac{m^4}{30} T^4</math></td> </tr> <tr> <td><math>g</math></td> <td><math>g_n \frac{2613}{4} T^3</math></td> <td><math>\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{4\pi^2}{15} T^3</math></td> <td><math>\frac{3}{2} n T</math></td> <td><math>g^b = g_b + \frac{1}{8} g_f</math></td> </tr> </tbody> </table>		相对数 Density	相对数 Fermion	非相对论	相对论 光子与中微子	$n$	$30 \frac{G_{133}}{30} T^3$	$\frac{3}{4} g_{\nu} \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3$	$g \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}$	$n = g_n \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3$	$\rho$	$30 \frac{G_{133}}{30} T^4$	$\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{m^4}{30} T^4$	$m n + \frac{3}{2} n T$	$g n^2 = g_b + \frac{3}{4} g_f$	$\rho$	$\frac{\rho}{3}$	$\frac{\rho}{3}$	$n T$	$\rho = g_b \frac{m^4}{30} T^4$	$g$	$g_n \frac{2613}{4} T^3$	$\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{4\pi^2}{15} T^3$	$\frac{3}{2} n T$	$g^b = g_b + \frac{1}{8} g_f$	
	相对数 Density	相对数 Fermion	非相对论	相对论 光子与中微子																							
$n$	$30 \frac{G_{133}}{30} T^3$	$\frac{3}{4} g_{\nu} \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3$	$g \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}}$	$n = g_n \left( \frac{4\pi^2}{15} \right) T^3$																							
$\rho$	$30 \frac{G_{133}}{30} T^4$	$\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{m^4}{30} T^4$	$m n + \frac{3}{2} n T$	$g n^2 = g_b + \frac{3}{4} g_f$																							
$\rho$	$\frac{\rho}{3}$	$\frac{\rho}{3}$	$n T$	$\rho = g_b \frac{m^4}{30} T^4$																							
$g$	$g_n \frac{2613}{4} T^3$	$\frac{1}{8} g_{\nu} \frac{4\pi^2}{15} T^3$	$\frac{3}{2} n T$	$g^b = g_b + \frac{1}{8} g_f$																							

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p><b>§. CMB 各向异性</b></p>	<p><b>[Def] 宇宙微波背景辐射</b>          宇宙温度降为 <math>T = 0.3\text{K}</math> 时, 原子产生, 宇宙从电离态变为中性, 光子退耦, 宇宙变得透明          光子在退耦时满足 Planck 黑体辐射分布 <math>n(\nu, z_{dec}) \propto \frac{1}{e^{h\nu/cT_{dec}} - 1}</math>  <math>\nu \rightarrow \frac{\nu_{obs}}{1+z_{dec}}</math>          则今天观测到的 CMB 为 <math>n(\nu) \propto \frac{1}{e^{h\nu/cT_{dec}(1+z)} - 1} = \frac{1}{e^{h\nu/cT_{obs}} - 1}</math> <math>T_{obs} = \frac{T_{dec}}{1+z}</math></p> <p><b>[Prop] 各向异性</b> 扣除偶极不对称和银河系尘埃辐射后 <math>T = 2.73\text{K}</math> <math>\Delta T \approx 10\mu\text{K}</math></p> <p>(i) 偶极不对称          由宇宙不均匀运动引起的背景辐射温度涨落 (Doppler 效应) <math>T_{moving} = T_{rest} (1 \pm \frac{v}{c} \cos\theta)</math>          速度 <math>v \rightarrow v/c</math>, 相对速度 <math>v</math> 矢角 <math>\theta</math>  <math>v/c = \frac{v_0(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta \cos\theta)^2}</math> <math>\beta = v/c</math>  <math>1+z \rightarrow T_{obs} = T_0 (1 \pm \frac{v}{c} \cos\theta)</math> <math>v/c \ll 1 \rightarrow T_0 (1 + \frac{v}{c} \cos\theta + \dots)</math> <math>\Delta T \approx 0.353\text{mK}</math></p> <p>(ii) 多极辐射          由球谐函数展开 <math>\delta T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_l^m \sin^l \theta + B_l^m \cos^l \theta] P_l^m(\cos\theta)</math>  <math>1+z \rightarrow \Delta T(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)</math> <math>l=2</math> 四极矩 <math>\rightarrow</math> 小尺度结构          总功率谱 <math>C_l = \frac{2}{2l+1} \sum_m  a_{lm} ^2 = \langle  a_{lm} ^2 \rangle</math>  <math>C_l(\theta) = \langle \Delta T(\hat{i}_1) \Delta T(\hat{i}_2) \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta)</math></p> <p><b>[Remark] CMB 数据处理</b> time-ordered data - full sky map - spectrum - parameter estimates</p>	
<p><b>§. 各向异性来源</b></p>	<p><b>[Prop] Sachs-Wolfe effect</b> 是在期间 由于引力扰动造成 光子和电子退耦 - 次级效应引力势影响          (i) 引力红移 <math>\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\delta\phi}{c^2} = -\frac{g_{00}}{c^2}</math>          (ii) 重散射时的涨 <math>\frac{\Delta T}{T} = +\frac{\delta n}{n} = +\frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{2}{3} \frac{\delta\phi}{c^2}</math> <math>1+z \rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\phi}{c^2} = -\frac{1}{3} \frac{g_{00}}{c^2}</math></p> <p><b>[Prop] Thermal Sunyaev-Zel'dovich effect + lensing effect + integrated Sachs-Wolfe effect</b></p>  <p><b>[Remark] CMB 各向异性</b> 来自最后散射面的物理状态 + 传播途上的物理状态</p>	
<p>Summary 总结</p>		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p>§. 不同尺度下的 CMB</p>	<p>• [Prop] 大尺度</p>  <p>• [Prop] 小尺度</p> <p>复合前宇宙电子电离态 光子有自由电子散射 自由电子 + 质子 → 耦合 → 光子质子流体 光子质子气体 压力 v.s. 引力 (声波震荡)</p>  <p>张拉 → 压力平衡 → 声波传播 <math>v \sim \frac{c}{3}</math> → 0 1 2 3 4 5 6 → 声波共振视界冻结 → 150 mpc 声波波峰 → 150 mpc 声波波谷</p> $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{1/3(dT_{rad} + d\rho_{b,DM})}{d\rho_{b,DM} + d\rho_{b,DM}}$ <p>考虑 <math>p = w\rho</math>, <math>\rho = \rho_b \Omega_b^{(11000)}</math>, <math>T \propto a^{-4}</math>, <math>p_b = 0</math>  <math>w = c_s^2 = \frac{c^2}{3(1+w)}</math>, <math>\rho = \frac{3\rho_b}{Pr}</math></p> <p>The comoving size of sound crossing horizon at recombination:  <math>w = \int_0^{z_{rec}} \frac{c_s dz}{a H} = \frac{1}{3} \int_{z_{rec}}^{\infty} \frac{da}{a H a^2}</math> 物质时期物质主导 <math>H^2 \propto H_0^2 \Omega_m (\frac{a_0}{a})^2</math></p> <p><math>z_{rec} = 1100</math>, <math>\Omega_m \approx 0.3</math>, <math>H_0 = 70</math> Mpc</p> <p>• [Def] free fall time <math>t_{ff} = \sqrt{\frac{1}{G\rho}}</math> Sound crossing time <math>t_{sc} = \frac{\lambda}{c_s}</math>  <math>w \rightarrow</math> Jeans length (<math>t_{ff} = t_{sc}</math>) <math>\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{1}{G\rho}}</math>  <math>\lambda_{J,prop} = 1.5</math> Mpc, <math>\lambda_{J,conv} = 1700</math> Mpc</p> <p>• [Prop] 声波振荡</p> <p>1) 振荡时之间隔 <math>w \rightarrow k_n \approx \frac{n\pi}{r_s}</math>          2) 声波视界 <math>r_s(z_2) = \frac{c}{H} \int_0^{z_2} \frac{dz}{a}</math>  <math display="block">H^2(a) = H_0^2 [\Omega_m a^{-3} + \Omega_b a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda]</math> <math display="block">D_s \approx \frac{r_s}{a_{21}}</math> <math display="block">d_{SLS} = d_{s,12} + 1100 z / (1+z)^2</math>  <p><math>D_s</math>: 声波子宇宙曲率  <math>\lambda = H_0 D_s = 200 d_{s,12} \sqrt{\Omega_m}</math></p>  <p>open flat closed</p> <p>• [Def] The acoustic scale <math>l_0 = (1+z_*) \frac{k D_{ph}(z_*)}{r_s(z_*)}</math>          The shift parameter <math>R = \frac{\sqrt{\Omega_m H_0}}{c} (1+z_*) D_M(z_*)</math></p> </p>	
<p>Summary 总结</p>		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<p><b>§. 暗能量存在</b></p>	<p>• Prop 1 Derivation from Friedmann Eqn</p> $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{2\dot{a}^2}{3a^2} \sum (\rho_i + 3p_i)$ <p>(i) 通过 Ia 型超新星观测不同红移的观测 <math>\Rightarrow</math> 加速膨胀 <math>\dot{a} &gt; 0</math></p> <p>(ii) 由 Friedmann 方程</p> $\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} > 0 \quad \text{要求: } w \leq p/\rho < -1/3 \quad \text{or } \Lambda > 0 \quad \text{or } \rho \leq \rho_{crit} \text{ 相对值}$ <p>(iii) Accelerating Matter</p>  <p><math>\Omega_m</math>: Amount of <math>w = -1</math> matter  <math>\Omega_m</math>: Amount of ordinary gravitating matter</p>	<p>• Prop 1 Assume <math>w_2(z) = \frac{P_{2(z)}}{P_{2(z)}}</math>, substituting into <math>\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum (\rho_i + 3p_i)</math></p> $\Rightarrow \frac{d(P_2/a^3)}{P_2/a^3} = -\frac{2\pi w_2 \dot{a}}{a} = \frac{2\pi w_2}{1+z} dz \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2(z)}{P_2(z_0)} = \exp\left(\int_{z_0}^z 2(1+w_2(z)) dz\right)$ <p>- if <math>w_2(z) = \text{const}</math> <math>\frac{P_2(z)}{P_2(z_0)} = (1+z)^{-2(1+w_2)} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_2)} \propto a^{-3(1+w_2)}</math></p> $\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\Lambda + \rho_2) = \frac{8\pi G}{3} \rho_2$
<p><b>§. 暗能量候选</b></p>	<p>• Prop 1 Cosmological constant</p> <p>Einstein 方程 <math>R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}</math></p> <p><math>\Lambda</math> 提供了正压强与负压强 <math>\rho' = \rho + \frac{\Delta \rho}{\Delta t}</math>  <math>p' = p - \frac{\Delta p}{\Delta t}</math></p> <p>Problem: <math>\frac{P_{obs}}{P_A} \approx 10^{120}</math></p>	<p>• Prop 1 Quintessence <math>-1 &lt; w &lt; -1/3 \rightarrow</math> Phantom (<math>w</math> 可以 <math>&lt; -1</math>)  <math>\rightarrow</math> Quintom <math>\rightarrow</math> Chaplygin gas</p>
<p>Summary 总结</p>		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
<b>§. 观测约束</b>	<p>• [Prop] Fitting the Cosmological Constant</p> <p>假设: <math>\Omega_m + \Omega_b + \Omega_\Lambda = 1</math></p> <p><math>H(z) = \frac{H_0}{a} = H_0 \sqrt{[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_b + \Omega_\Lambda(1+z)^2]}</math></p> <p>观测: <math>\mu_{obs} = \theta_{obs}</math></p> <p>理论: <math>d_L(z; \Omega) = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_b + \Omega_\Lambda(1+z)^2}} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z'; \Omega)}</math></p> <p><math>\chi^2_{min} = 5 \log(d_L(z_{obs}) / \text{Mpc})^2 + 25</math></p> <p><math>\mu \rightarrow \int_0^z (\Omega_m, \Omega_\Lambda) = \sum \frac{[\mu_{obs} - \mu_{th}(z)]^2}{\sigma_{obs}^2} = \min</math></p>	
<b>§. 观测方法</b>	<p>• [Wrap up] DE 观测方法 <b>CMB, SN, Cluster, BAO, 弱引力透镜</b></p> <p>• [Prop] Baryon Acoustic Oscillations</p> <p>在宇宙光子退耦前 物质在引力作用下内收缩 在物质质团下膨胀 <math>\mu \rightarrow</math> 声波振荡</p> <p>在光子退耦后保留下来 <math>\mu \rightarrow 150 \text{ Mpc}</math></p> <p>• [Prop] Cluster X-ray</p> <p>星系团总物质与总质量比值与宇宙中 <math>\Omega_b / \Omega_m</math> 比值</p> <p>Chandra + lensing <math>\rightarrow</math> total mass</p> <p>Chandra <math>\rightarrow</math> X-ray mass</p> <p><math>f_{gas} = \frac{\text{X-ray gas mass}}{\text{total cluster mass}} \quad f_{gal} = 0.19 h^{0.5} f_{gas}</math></p> <p><math>\mu \rightarrow f_{baryon} = f_{gal} + f_{gas} = f_{gas}(1 + 0.19 h^{0.5}) = b \frac{\Omega_b}{\Omega_m}</math></p> <p>可限制 <math>\Omega_m = \frac{b \Omega_b}{f_{gas}(1 + 0.19 h^{0.5})}</math></p> <p>• [Prop] Hubble 常数</p> <p><math>H(z) = -\frac{1}{a} \frac{dz}{dt}</math> 无角直径距离与红移建立联系</p> <p><math>\mu \rightarrow</math> 年龄微分法</p> <p>找到 <math>\Delta z</math> 的两个天体发射光子时 对应宇宙年龄差 <math>\Delta t</math> <math>\leftarrow</math> 假设近似 <math>\leftarrow</math> 只有星丛光通</p> <p>• [Prop] 光度距离 <math>L = 4\pi d_L^2 F \quad \mu \rightarrow</math> 的 <math>L = \text{const}</math> 观测源 <math>\Sigma</math> v.s. <math>d_L</math></p> <p>SNe Ia, K-burst</p>	
<b>Summary 总结</b>		

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录
§ 1. Jeans 不稳定性	<p>• [Prop1] 宇宙大尺度均匀, 小尺度不均匀 (显示 <math>\sim 100 \text{ kpc} \rightarrow</math> 星系团 <math>\sim \text{Mpc}</math>, 网状结构 + 空洞 <math>\sim 50\text{-}100 \text{ Mpc}</math>)</p> <p>• [Def1] Jeans Instability</p> <p>引力主导时 <math>\rightarrow</math> 坍塌      压强主导时 <math>\rightarrow</math> 声波振荡</p> <p>因为声波的传播速度为声速 <math>v_s</math>, 所以尺度为 <math>L</math> 的扰动      时标 <math>t_s \sim \frac{L}{v_s}</math></p> <p>引力坍塌时标: <math>t_g \sim 1/v_g</math></p> <p> <math>t_s &lt; t_g \rightarrow</math> 稳定  <math>t_s &gt; t_g \rightarrow</math> 不稳定性  <math>t_s \sim t_g \rightarrow</math> 临界金斯尺度 <math>L_c \sim v_s / \sqrt{G\rho}</math>      <math>L &gt; L_c</math> 时 引力不稳定性         </p> <p>[Remarks] 引力不稳定性依赖于 <math>L_c</math> (冷气体 <math>L_c</math> 小, 热气体 <math>L_c</math> 大)</p>	
	<p>• [Prop1] Top-Down Scenario</p> <p>Require: Hot DM (<math>v \sim 0.99c</math>)</p> <p>Smooth, large features</p> <p>• [Prop2] Bottom-Up Scenario</p> <p>Require: Cold DM (slow)</p> <p>Clump</p> <p>Supported by observations</p>	
§ 2. 扰动宇宙密度涨落	<p>• [Prop1] 考虑扰动为 <math>\delta(x)</math>, 与扰动速率 <math>\delta \dot{x} = \frac{1}{(aR)^2} \delta \dot{x} = \frac{1}{(aR)^2} \delta \dot{x}</math>      <math>P(x) = 1.6 \xi^{1.2}</math></p> <p>宇宙膨胀以后星系的形成是扰动增长</p> <p> <math>\left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &amp;= \delta \dot{x} e^{2f} \\ \frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \frac{d\delta}{dt} - \delta(4\pi G\rho_0 - k^2 v_s^2) &amp;= 0 \end{aligned} \right.</math> </p> <p><math>\Delta \rightarrow \Delta_f</math> 时 <math>k^2 v_s^2 \rightarrow 0</math></p> <p><math>\rightarrow \frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \frac{d\delta}{dt} - \delta(4\pi G\rho_0) = 0</math>      扰动增长率 <math>\frac{\delta}{\rho}</math> 与 <math>\rho</math></p> <p>[Prop1] 物质为主的宇宙 <math>\Omega_m = 1</math></p> <p>已知 <math>4\pi G\rho_0 = \frac{3}{5a^2} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{3}{5a^2} \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{6}{5} \frac{d\delta}{dt} - \frac{3}{5a^2} \delta = 0</math></p> <p><math>\rightarrow</math> 增长解 <math>\delta_+(t) = \delta_+(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}</math></p> <p>衰减解 <math>\delta_-(t) = \delta_-(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}</math></p> <p>[Prop2] 辐射为主的宇宙 <math>\Omega_r = 0</math></p> <p>已知 <math>\rho_0 = 0 \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{d\delta}{dt} = 0</math></p> <p><math>\rightarrow</math> 增长解 <math>\delta_+(t) = \delta_+(t_0)</math></p> <p>衰减解 <math>\delta_-(t) = \delta_-(t_0) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}</math></p> <p>[Prop3] 辐射背景辐射场</p> <p><math>\Omega_{tot} = 1 \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \epsilon) \quad</math> 其中物质密度 <math>\rho \propto a^{-3}</math>      辐射能量密度 <math>\epsilon \propto a^{-4}</math></p> <p>辐射物质扰动</p> <p><math>\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \frac{d\delta}{dt} - \delta(4\pi G\rho_0) = 0</math>      定义 <math>y = \rho/\epsilon = a/a_0</math></p> <p><math>\rightarrow \frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta}{dy} - \frac{3\delta}{2y(1+y)} = 0</math>      <math>\rightarrow</math> 增长解 <math>\delta \propto 1 + 3y/2</math></p> <p>衰减解 <math>\delta \propto (1+3y/2) \ln \left[ \frac{d(1+y)}{d(1+y-1)} \right] - 3(1+y)^{3/2}</math></p>	

# 宇宙学导论 梳理

Catalog: I. 宇宙学原理 II. 宇宙演化 III. 宇宙热历史 IV. CMB & BAO V. Dark energy VI. 结构形成

## I. Basis I: 宇宙学基础框架

宇宙学原理 宇宙在大尺度上均匀、各向同性

→ Robertson-Walker 度规  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right]$

在上述度规中  $(r, \theta, \phi)$  为共动坐标, 不随宇宙膨胀改变 固有距离定义为 同一时刻两点间的距离  $d_p = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$

→  $d_p = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \text{Sinn}^{-1}(k^{1/2} r)$  其中  $\text{Sinn}(x) = \begin{cases} \sin x & k=1 \\ x & k=0 \\ \sinh(x) & k=-1 \end{cases}$

哈勃常数 考虑  $d_p$  随时间变化  $\frac{d}{dt}(d_p) = \frac{da(t)}{dt} \frac{1}{a(t)} d_p = \frac{\dot{a}}{a} d_p$

→  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$  在下  $v = H \cdot d$

宇宙学红移 由于宇宙膨胀引起的红移  $\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = 1+z$

在 Robertson-Walker 时空中代入 Einstein 场方程

→ Friedmann 方程  $\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \end{cases}$  二者联立得能量守恒方程  $\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$

Friedmann 方程的目标为求解  $a(t), k$  为此我们还需要物态方程  $p = p(\rho)$

设  $p = w\rho$  对于常数  $w$ , 由能量守恒方程  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$

$\begin{cases} \text{辐射 } p = \frac{1}{3}\rho \rightarrow \rho \propto a^{-4} \\ \text{物质 } p = 0 \rightarrow \rho \propto a^{-3} \\ \text{真空 } p = -\rho \rightarrow \rho = \text{const} \\ \text{暗能量 } p = w\rho \rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)} \end{cases}$

由 Eq.12,  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$   $H = \frac{\dot{a}}{a}$

令  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$   $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$  可得无量纲化 Eq.2

$1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \Sigma, \Omega_i = \Omega_i \cos$  再令  $\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$

→  $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$

总物质含量决定宇宙曲率

在下  $H_0 = h \times \frac{100 \text{ km/s}}{\text{Mpc}}$   $h \sim 0.7$  临界密度  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.879 h^2 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$

Remark 定义减质因子  $q = 1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda$

## I. Basis 2: 宇宙学红移

「Background」  $\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_e)}$   $\equiv 1+z$  描述了  $\lambda$  随时间的演化  $\rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = 1+z$

另一种意义上可表达  $a(t) \propto \frac{1}{1+z}$  互换  $d\lambda = -(1+z) H(z) d\lambda$

宇宙学红移  $\lambda(z) = \int_z^{\infty} \frac{dz}{H(z)(1+z)}$  其中  $H(z)$  从 Eq. 1 中得到  $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_m - \frac{k}{a^2}}$

$$\rho_r \propto a^{-4} \quad \rho_m \propto a^{-3} \quad \rho_\Lambda \propto \text{const} \quad a \propto \frac{1}{1+z}$$

$$\rightarrow H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_k (1+z)^2}$$

## 宇宙距离: 「四种距离」

(i) 固有距离: 共动坐标  $r$  代入 RW 度规  $dl = \frac{a(z)}{k^{1/2}} \sin^{-1}(k^{1/2} r)$

(ii) 光层距离:  $dl = \left( \frac{c}{4\pi F} \right)^{1/2} = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$

(iii) 角直径距离:  $d_A = \frac{D}{\theta} = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$

(iv) 共动距离:  $d_C = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$   $d_A = \frac{d_C}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$

$\rightarrow$  视导 从原点到视界面的固有距离  $d_{H(z)} = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$  此为  $z$  处的固有距离, 考虑膨胀  $D_H = (1+z) d_H$

## II. 宇宙演化

起点: Friedmann 方程  $\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho; & \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho; & \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \\ \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho; & \rho_r \propto a^{-4} & \rho_m \propto a^{-3} & \rho_\Lambda \propto \text{const} \end{cases}$

宇宙演化历程 辐射主导  $\rightarrow$  物质主导  $\rightarrow$  暗能量主导 「对于辐射」可理解为光子  $E(r) dv = \frac{3nkT^3}{c^3} \frac{1}{e^{3kT/h\nu} - 1}$

由  $\Omega_m, \Omega_r$  可反推  $1+z_m = \frac{\Omega_r}{\Omega_m}$

对于物质主导, 平坦的宇宙  $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho; \rho \propto a^{-3} \rightarrow a(t) \propto t^{2/3}$   $\begin{cases} \text{辐射主导 } a \propto t^{1/2} \\ \text{物质主导 } a \propto t^{2/3} \end{cases}$

几种模型 「曲率主导」  $\Omega_r = \Omega_m = \Omega_\Lambda = 0 \quad \Omega_k = 1 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = 0$  匀速膨胀且  $k < 0$

早期 「辐射主导」  $\Omega_r = 1 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_r \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \quad a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/2}$

中期 「物质主导」  $\Omega_m + \Omega_k = 1$  子模型 「Open」  $k = -1 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \frac{c^2}{a^2}$  永远膨胀

「Closed」  $k = 1 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m - \frac{c^2}{a^2} \quad a = a_0 \left( \frac{1 - \Omega_m}{2(1 - \Omega_m)} \cos \theta - 1 \right)$

「Standard」  $k = 0 \rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \quad a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$

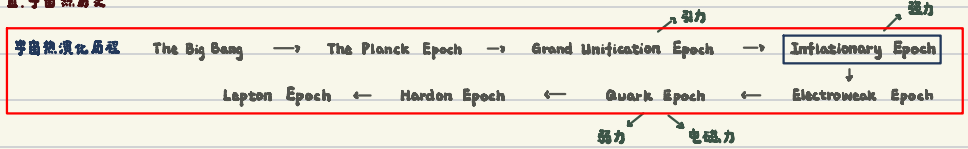
「真空主导」  $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{\Lambda c^3}{3} - \frac{H_0^2}{a^3} \quad a(t) = \begin{cases} \frac{c}{H_0} \sinh(H_0 t) & k = -1 \\ \frac{c}{H_0} \cosh(H_0 t) & k = 1 \\ \frac{c}{H_0} \exp(H_0 t) & k = 0 \end{cases}$

其中  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^3}{8\pi G} \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$

「真空 + 物质主导」  $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a^2} = H_0^2 (\Omega_{M0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda0}) \quad a(t) = \left( \frac{\Omega_{M0}}{\Omega_{\Lambda0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left( \frac{3H_0 H_0 t}{2} \right)$

现阶段「 $\Lambda$ CDM」  $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}}{a^2} = \frac{2H_0}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) - \frac{R}{a^2}$

五. 宇宙热历史



为解决  $\Lambda$ CDM 中的 (i) 平坦性问题 (ii) 视界问题 提出暴胀宇宙学

Reichl 2 处视界  $dh(1z) = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad \Rightarrow \quad \text{视界尺度} D_H = (1+z) dh$

暴胀原因 GUT epoch 压强为负, 宇宙出现相交与对称性破缺  $\Rightarrow$  高真空能量导致宇宙指数膨胀  $\Lambda$  主导时  $a \propto \exp(Ht)$

解决平坦性问题 由 Eq. 11) 得  $|1 - \frac{1}{\Omega_{tot}}| \propto \frac{1}{\rho a^3} \xrightarrow{R \propto t^2} a^3 \propto t \quad \text{要求 } \ln(a) \geq 60 \quad \text{即使宇宙早期几何高度弯曲, 经过暴胀即变平直}$

视界视界问题 宇宙起源于一个很小的区域, 暴胀而宇宙大小远小于视界大小, 因而具有相同温度

Phase 1. 原初核合成

原料: 质子 + 中子  $\xrightarrow{\text{物质反物质不对称}}$  温度冷却到足够低时 (质子结合能  $\sim MeV$ ) 开始核合成

其他对宇宙原初丰度起着决定性作用

初期 质子 + 中子满足热力学平衡  $\frac{n_n}{n_p} = \exp(-\frac{\Delta m}{kT}) \quad \Delta m = m_n - m_p$

Phase 2. 中子数冻结

不同粒子间相互作用不同, 其脱离热平衡 (退耦) 时间不同

宇宙膨胀温度大于弱相互作用时 中子数冻结  $\frac{n_n}{n_p} = \frac{1}{7}$  同时中子可衰变为质子

此时  $^4\text{He}$  丰度为  $X_{He} = \frac{2(n_n/p)}{1+(n_n/p)} \sim 0.25 \quad ^4\text{He}$  为主要核合成产物

Phase 3. 中微子退耦

相互作用率  $\Gamma$  宇宙膨胀时间尺度  $at \sim \frac{a}{c} = H^{-1} \quad \frac{\Gamma}{H} \ll 1$  时 粒子退耦

### Phase 4. 原子复合

考虑 H, He 元素的复合  $H^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$  号 定义电离度  $x = \frac{n_H}{n_p + n_H} \approx \frac{n_H}{n_p}$

福塞里相字宙的 Saha Eq.  $\frac{x^2}{1-x} \approx \frac{0.26}{\eta} \left(\frac{m_e}{T}\right)^3 e^{-\frac{13.6}{T}}$   $\Omega_b h^2 = 13.6 eV$   $\eta$  为光子数与光子数之比

### IV. CMB & BAO

「CMB」起源 光子与自由电子散射, 当电离度高时 散射足够频繁, 光子不能自由逃逸; 复合发生后 电离度下降, 光子成为自由光子

宇宙背景光子与自由电子发生 最后一次散射 后自由传播  $\mu \rightarrow$  此后从  $z$  出发的光子经历光源  $\tau = \int_0^z dt \frac{c}{a(t)} n_B c \frac{dt}{dz} dz$

Recall  $dz = -(1+z) H(z) dt$

黑体谱 光子退耦时  $n(\nu)_{dec} \propto \frac{1}{e^{h\nu/kT_{dec}} - 1}$   $\nu = \frac{1+z_{dec}}{1+z} \nu_{dec}$   $n(\nu) \propto \frac{1}{e^{h\nu/kT_{eff}} - 1}$   $T_{eff} = \frac{T_{dec}}{1+z}$  CMB 非常均匀

各向异性 扣除噪声  $\rightarrow$  (i) 偶极不对称性 (夸克原运动) (ii) 银河系尘埃辐射影响

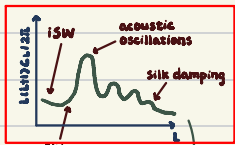
Doppler 效应  $T_{moving} = T_{rest} (1 \pm \frac{v}{c} \cos\theta)$

球谐函数展开  $\Delta T = \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{m=-L}^L \Delta a_{lm} Y_{lm}(\theta)$  其中  $L=0$  平均温度  $L=1$  偶极项

$L$  次对应  $\theta$  角阶变化 (即小尺度结构)  $\Delta a_{lm}$  对应该尺度下的温度起伏

$\mu \rightarrow$  功率谱  $C(l) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-l}^l (2l+1) C_{lm} P_l(\cos\theta)$

其中  $C_L = \frac{1}{2L+1} \sum_{m=-L}^L \Delta a_{lm} \Delta a_{lm}^* \approx \langle (\Delta a_{lm})^2 \rangle$  反映该尺度下的温度变化强度



各向异性来源

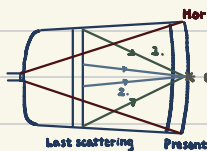
I. SW effect (CMB 产生时) 最后一次散射受扰动的引力势影响

II. thermal SZ effect, lensing effect, integrated SW effect (CMB 传播时)

比光子自由程尺度的扰动被抹平

观测范围

「Acoustic Oscillation」复合前  $\nu \xrightarrow{scat} e^- \xrightarrow{scat} \nu$   $\mu \rightarrow$  光子流子流体



1. 大尺度观测  $\rightarrow$  反映原初扰动
2. 小尺度观测  $\rightarrow$  包含视界内物理过程

$c_{eff} = \int \frac{1}{a} dp$   
 $c_{set} = \frac{\Delta}{c_s}$   
 $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{c^2}{3(1+\beta\rho_b/\rho_r)}$   
 $\Gamma_S = \int_0^{z_{rec}} \frac{c_s}{a(z)} dz$

传播  
 复合后传播

CMB 对宇宙模型的限制

在声学振荡部分 振荡时位置没被满足  $k_{set} = \frac{n_B}{r_S} \rightarrow \Gamma_S(z_{rec}) = \frac{c}{\beta} \int_0^{z_{rec}} \frac{dz}{a(z) \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_b a^{-4} + \Omega_c a^{-2} + \Omega_\Lambda}}$

$\Omega_b h^2 \rightarrow$  峰位置  $\Omega_\Lambda \rightarrow$  无影响  
 $\Omega_b h^2 \rightarrow$  最大峰高  $\Omega_m h^2 \rightarrow$  越大 ( $\rho_c = \rho_m$  越早) 峰越弱

「BAO」 发生在光子退耦前 量子压力对抗引力  $\rightarrow$  声学振荡  $\rightarrow$  光子退耦后保留

原理与CMB类似 起源于光子质子流声学振荡 在退耦后CMB  $\rightarrow$  光子 BAO  $\rightarrow$  量子

V. Dark Energy

重点: Friedmann 方程 Eq. 
$$\begin{cases} (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda + \rho_\Lambda) \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum (\rho_i + 3p_i) + \frac{\Lambda}{3} \end{cases}$$

$\rightarrow$  加速膨胀要求 (i) 存在一种负压物质  $w < -\frac{1}{3}$  or (ii)  $\Lambda \neq 0$  or (iii) 修正广义相对论

recall  $\Lambda$  来自真空能  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$   $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

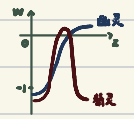
Case (i) DE 为 Cosmological constant (真空能)

问题:  $\rho_{vac} / \rho_\Lambda = 10^{120}$   
从量子场论推导  $\rho_c \Omega_\Lambda$

(ii) DE 为一种负压物质  $w = \text{const} < -\frac{1}{3}$  当  $w = -1$  时与  $\Lambda$  等效

(iii) DE 为一种负压物质  $w = w(z)$

物质 ( $-1 < w(z) < 1$ )  $\rightarrow$  幽灵 ( $w$  可以取  $-1$ )  $\rightarrow$  精灵 ( $w$  两次取  $-1$ )  $\rightarrow$  Chaplygin gas (早期像物质, 晚期像  $\Lambda$ )



限制 DE 的方法 CMB, SNe Ia, Cluster, BAO, 弱引力透镜 \* 经验规律

(i) SNe Ia 假设 SNe Ia 光度一致 求距离模数与红移的关系  $\mu = 5 \log_{10} \frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} + 25$   $\leftarrow$  拟合最佳的  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$

问题: SNe Ia 光度不一定相同 I - burst 原理

(ii) 星系团 X 射线气体 假设 Cluster 物质组成  $\Omega_b / \Omega_m$  与宇宙一致 设  $f_{\text{baryon}} = \frac{\rho_b}{\rho_m}$   $f_{\text{baryon}} = f_{\text{gas}} + f_{\text{gal}} = f_{\text{gas}} (1 + 0.19 h^2)$

$\rightarrow \Omega_m = \frac{b \Omega_b}{f_{\text{gas}} (1 + 0.19 h^2)}$  只限制  $\Omega_m$ , 需假设  $b, h, \Omega_b$

(iii) Hubble 考量 设  $H(z) = H_0 E(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dE}{dz}$   $E(z)$  为  $\Omega$  与  $z$  的函数  $\leftarrow$  恒星演化  
理论给出  $\rightarrow$  参数化方法 (求红移间隔  $\Delta z$  内宇宙年龄差  $\Delta t$ )

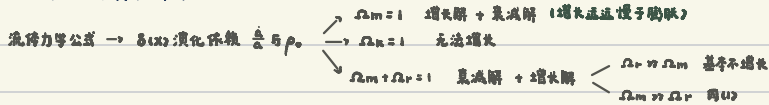
VI. 宇宙结构形成

「形成机制」 Jeans 不稳定性 引力  $t_{ff} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$  压力  $t_s \sim \frac{L}{c_s}$   $t_s > t_{ff}$  时塌缩  
 $\rightarrow$  Jeans 尺度  $\lambda_J \sim \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$  Jeans 质量  $M_J \sim \frac{4\pi}{3} (\frac{\lambda_J}{2})^3 \rho$   $L > \lambda_J$  or  $M > M_J$  时塌缩

「形成模型」(i) 自上而下: 由 HDM 主导 (ii) 自下而上: 由 CDM 主导

「扰动演化」假设初始扰动为  $\delta(x)$

1. 扰动会被宇宙膨胀抑制



2. 不同尺度的扰动在不同阶段演化行为不同

引入转移函数  $T(k)$  描述初始扰动谱形状的改变

- 小尺度  $\rightarrow$  进入视界时间早 (辐射主导)  $\rightarrow$  基本不增长
- 大尺度  $\rightarrow$  进入视界时间晚 (物质主导)  $\rightarrow \delta(x) \propto a(t)$

引入扰动功率谱  $P(k) = \langle \delta_k^2 \rangle$   $\delta_k^2 = \int \langle \delta(x)^2 \rangle$  后在不同尺度下的扰动

利用这些性质可推断物质组成模型

- (i) 纯量子物质模型 (X:  $\Omega_b \ll \Omega_m$ ; 星系形成时间推迟)
- (ii) HDM (X: 相对论粒子 free-streaming 将小尺度扰动抹平  $\rightarrow$  大尺度结构先形成  $\rightarrow$  碎裂  $\rightarrow$  星系形成时间推迟)
- (iii) CDM (V: free-streaming 可忽略, 小尺度结构先形成)

3. 仅考虑  $\delta(x) \propto a(t)$  的解 可以推出 Jeans 不稳定性(?)

考虑  $\delta(x)$  非线性演化 (球形坍缩模型) 会使总质量大大增加

Two-point correlation 对  $\delta(x)$  的功率谱做 Fourier 变换

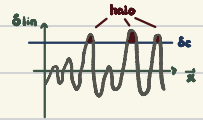
Press-Schechter mass function 从统计的角度得出塌缩天体数目随质量的分布与演化

假设质量数是  $\delta_m = \frac{m - \langle m \rangle}{\langle m \rangle}$  为 Gauss 分布  $\rightarrow \delta_m > \delta_c$  时塌缩  $\rightarrow$  推导在 V 中形成质量为 m 的天体概率

$\rightarrow$  在 V 内不同质量天体数密度  $N(m)$  此即为 P-S 质量函数  $\rightarrow$  利用壳层比转化为  $S_1, \dots$  阶函数

- (i) 自下而上 (ii) 球对称塌缩模型 (天体形成于一定峰值处, 而非所有峰值) (iii) 与  $\Omega$  相关

(iv) 描述 DM halo 的质量分布



Fingers-of-God effect 星系团随机速度弥散使其偏离 CZ = HoF ( $\rightarrow CZ = HoF + \delta v \cdot F$ ) 通过计算 correlation function 可以观测

$\rightarrow$  显示扰动

## Appendix 1. 记号公式

1. 完整 Robertson - Walker 度规  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right)$

2. Friedmann 方程  $\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum \rho_i \\ \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum (\rho_i + 3p_i) \end{cases}$

不同物质组成  $p = w\rho$   $\rho \propto a^{-3(1+w)}$  辐射  $w = \frac{1}{3}$  物质  $w = 0$  真空  $w = -1$

定义  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$   $\Omega_{r,m,\Lambda} = \frac{\rho_{r,m,\Lambda}}{\rho_c}$   $\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$   $\Rightarrow \sum_{r,m,\Lambda,k} \Omega_i = 1$   $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

3. 减速因子  $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} \Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda$

4. 宇宙年龄  $dZ = -(1+Z) H(Z) dt$   $t(Z) = \int_Z^\infty \frac{1}{(1+Z) H(Z)} dz$   $H(Z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+Z)^3 + \Omega_r(1+Z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+Z)^2}$

5. 宇宙距离 固有距离  $dp = \frac{a}{k^{1/2}} \sin^{-1}(k^{1/2} r)$   $\sin(x) = \begin{cases} \sin x & k=1 \\ x & k=0 \\ \sinh x & k=-1 \end{cases}$   
共动距离  $dc = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$

光展 & 角直径距离  $d_A = \frac{dc}{1+Z} = \frac{d_b}{(1+Z)^2}$

视界  $d_H = \frac{c}{H_0(1+Z)} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$

6. 宇宙演化  $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$   $E(z) dz = \frac{8\pi h^2 v^3}{c^3} \frac{1}{e^{hw/(kT)} - 1}$   $E_r \propto a^{-4}$   $T_r \propto a^{-1}$

7. 宇宙热历史  $x_\gamma = \frac{2\pi^2 p}{15(1+w) \rho}$   $\frac{x_\gamma}{1-x_\gamma} = \frac{0.26}{j} \left( \frac{m_p}{T} \right) e^{-\frac{m_p}{T}}$

$\tau(z) = \int_0^z c_T n_e c \frac{dz}{dz}$   $C_S = \frac{c^2}{3} \left( 1 + \frac{\rho_p}{\rho_r} \right)$   $\tau_s = \int_0^t \frac{c_s}{a(t')} dt$

8. Jeans 不稳定性  $\tau_0 = \frac{1}{\lambda_0 \rho}$   $\tau_s = \frac{1}{c_s}$   $\Rightarrow \lambda_J = \frac{c_s}{\lambda_0 \rho}$   $M_J = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\lambda_J}{2} \right)^3 \rho$