## 5.4 角动量的合成

令 $\hat{K}_1=(\hat{K}_{1x},\hat{K}_{1y},\hat{K}_{1z})$，$\hat{K}_2=(\hat{K}_{2x},\hat{K}_{2y},\hat{K}_{2z})$ 为俩~の角动量算符

则合成矢量 $\hat{K}=\hat{K}_1+\hat{K}_2$ 及其储分量也满足同样の对易关系

此外，$[\hat{K}^2,\hat{K}_1^2]=[\hat{K}^2,\hat{K}_2^2]=0$

已知 $\hat{K}_{1z}.\hat{K}_{2z}$ の本征值(分别有 $2k_1+1$. $2k_2+1$ 个态)

则 $m_{max}=k_1+k_2$, $m_{min}=-(k_1+k_2)$. 显然 $k_{max}=k_1+k_2$

总量子态数 $(2k_1+1)(2k_2+1)=\sum\limits_{k=k_{min}}^{k_1+k_2}(2k+1)=\sim=(k_1+k_2+k_{min}+1)(k_1+k_2-k_{min}+1)$

易知，$k_{min}=|k_1-k_2|$，则得 $k=k_1+k_2, k_1+k_2-1, \cdots, |k_1-k_2|$.

注：量子力学中，角动量矢量大小为 $\sqrt{k(k+1)}$ 而非 $k$；

## §5. 角动量算符 5.1 对易关系

以 $\hbar$ 为单位, 有 $\begin{cases}[\hat{K}_x,\hat{K}_y]=i\hat{K}_z\\ [\hat{K}_y,\hat{K}_z]=i\hat{K}_x\\ [\hat{K}_z,\hat{K}_x]=i\hat{K}_y\end{cases}$, 也即 $\hat{K}\times\hat{K}=i\hat{K}$, $\hat{K}$ 为矢量算符 $\rightarrow$ $\hat{K}_x,\hat{K}_y,\hat{K}_z$ 为一组厄米算符

def: $\hat{K}^2\equiv\hat{K}_x^2+\hat{K}_y^2+\hat{K}_z^2$, 易得 $[\hat{K}^2,\hat{K}_i]=0$, $i=x,y,z$

### 5.2 角动量分量の本征值

def: $\hat{K}_\pm=\hat{K}_x\pm i\hat{K}_y$, 有 $[\hat{K}_z,\hat{K}_\pm]=\pm\hat{K}_\pm$

可知, $\hat{K}_+$ 和 $\hat{K}_-$ 分别为 $\hat{K}_z$ 本征态 $|m\rangle$ の升、降算符: $\hat{K}_\pm|m\rangle=||m\pm1\rangle\rangle$

其厄米共轭式为: $\langle m|\hat{K}_\mp=\langle\langle m\pm1||$, 相乘得 $\langle\langle m\pm1||m\pm1\rangle\rangle=\langle m|\hat{K}_\mp\hat{K}_\pm|m\rangle$

故归一化の本征矢为 $|m\pm1\rangle=\dfrac{\hat{K}_\pm|m\rangle}{\sqrt{\langle m|\hat{K}_\mp\hat{K}_\pm|m\rangle}}$,

得知 $\hat{K}_z$ の本征值构成差值为1の~等间隔序列.

### 5.3 角动量平方の本征值

$\hat{K}_-\hat{K}_+=(\hat{K}_x-i\hat{K}_y)(\hat{K}_x+i\hat{K}_y)=\hat{K}_x^2+\hat{K}_y^2+i(\hat{K}_x\hat{K}_y-\hat{K}_y\hat{K}_x)=\hat{K}^2-\hat{K}_z^2-\hat{K}_z$

即✓, 同理 $\hat{K}_+\hat{K}_-=\hat{K}^2-\hat{K}_z^2+\hat{K}_z$

由于 $\begin{cases}\hat{K}^2|Km\rangle=K|Km\rangle\\ \hat{K}_z|Km\rangle=m|Km\rangle\end{cases}$, $\begin{cases}\langle Km|\hat{K}_-\hat{K}_+|Km\rangle=K-m^2-m\geq0\\ \langle Km|\hat{K}_+\hat{K}_-|Km\rangle=K-m^2+m\geq0\end{cases}$

即 $K\geq m^2\pm m$, $K+\frac{1}{4}\geq(m\pm\frac{1}{2})^2\geq0$, 即 $\sqrt{K+\frac{1}{4}}\mp\frac{1}{2}\geq m\geq-(\sqrt{K+\frac{1}{4}}\pm\frac{1}{2})$

令 $\sqrt{K+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\equiv k$, $\sqrt{K+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\equiv k+1$, $K=\sqrt{k(k+1)}$, 于是有 $\begin{cases}k+1\geq m\geq-k\\ k\geq m\geq-(k+1)\end{cases}$, $k\geq0$

$\hat{K}_-|Km_{min}\rangle=0$ 而 $\hat{K}_+|Km_{max}\rangle=0$

$\Rightarrow m_{min}=-k$, $m_{max}=k$, $m=-k,-k+1,\cdots,k-1,k$

称 $k$ 为角量子数, $m$ 为磁量子数. 并以 $|km\rangle$ 代替 $|Km\rangle$ 来表 $\hat{K}^2$ 和 $\hat{K}_z$

综上, 得以下结论:

1) $\hat{K}^2$ 与 $\hat{K}_z$ 有一组共同本征态 $|km\rangle$

2) 在 $|km\rangle$ 中 $\hat{K}^2$ の本征值皆为 $k(k+1)$, $k$ 为(半)整数,

   $\hat{K}_z$ の本征值取下列 $2k+1$ 个数值: $m=-k,\cdots,k$

3) 正交归一の $2k+1$ 个本征矢 $|km\rangle$ 架起一个 $2k+1$ 维の态矢空间

## §4. 升降算符

· 基本性质：给定 $\hat{A}$，若∃ $\hat{\eta}$ 和 $\hat{\eta}^\dagger$（厄米共轭），满足：$\begin{cases}[\hat{A},\hat{\eta}^\dagger]=\lambda\hat{\eta}^\dagger \\ [\hat{A},\hat{\eta}]=-\lambda\hat{\eta}\end{cases}$

则对 $\hat{A}$ の任一本征值为 $a$ 的本征矢 $|a\rangle$，

将有：$\begin{cases}\text{只要 } \hat{\eta}^\dagger|a\rangle\neq 0\text{，它就是 } \hat{A} \text{ の另一本征值为 } a+\lambda \text{ の本征矢.} \\ \hat{\eta}|a\rangle\neq 0, \qquad a-\lambda\end{cases}$

$\hat{\eta}^\dagger$ 和 $\hat{\eta}$ 分别称为升算符和降算符.

证：左：$[\hat{A},\hat{\eta}^\dagger]|a\rangle=\hat{A}\hat{\eta}^\dagger|a\rangle-\hat{\eta}^\dagger\hat{A}|a\rangle=\hat{A}\hat{\eta}^\dagger|a\rangle-\hat{\eta}^\dagger a|a\rangle=\hat{A}\hat{\eta}^\dagger|a\rangle-a\hat{\eta}^\dagger|a\rangle$

右：$\lambda\hat{\eta}^\dagger|a\rangle$、左 = 右 $\Rightarrow \hat{A}\hat{\eta}^\dagger|a\rangle=(a+\lambda)\hat{\eta}^\dagger|a\rangle$

同理，$\hat{A}\hat{\eta}|a\rangle=(a-\lambda)\hat{\eta}|a\rangle$、又假设 $\Rightarrow \hat{\eta}^\dagger|a\rangle, \hat{\eta}|a\rangle\neq 0$

· 产生算符 & 消灭算符

已知 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=\hat{I}$，则 $\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 与其对易关系为 $\begin{cases}[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a} \\ [\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger\end{cases}$

设 $\hat{N}$ 有个本征值 $n$，相应本征矢 $|n\rangle$

$\Rightarrow\begin{cases}\hat{N}\hat{a}|n\rangle=(n-1)\hat{a}|n\rangle \\ \hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle=(n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle\end{cases}$，即 $\begin{cases}\hat{a}|n\rangle\propto|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle\propto|n+1\rangle\end{cases}$

$\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}\Rightarrow n=\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle\geqslant 0$. ∃ $n_{min}\geqslant 0$，且 $\hat{a}|n_{min}\rangle=0$

通常，$n_{min}=0$，$n=0,1,2,\ldots$ 对应 $\begin{cases}|0\rangle, & |1\rangle\rangle=\hat{a}^\dagger|0\rangle, & |2\rangle\rangle=\hat{a}^\dagger|1\rangle\rangle \\ \langle 0|, & \langle\langle 1|=\langle 0|\hat{a}, & \langle\langle 2|=\langle\langle 1|\hat{a}\end{cases}$

注："‖"の Dirac 符号表示尚未归一化

$\langle 0|0\rangle=1$，$\langle\langle n\|n\rangle\rangle=\langle 0|\hat{a}^n\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle=n!$

∴归一化の本征矢为 $\begin{cases}|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}|n\rangle\rangle=\frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle \\ \langle n|=\frac{1}{\sqrt{n!}}\langle\langle n|=\langle 0|\frac{\hat{a}^n}{\sqrt{n!}}.\end{cases}$

注：$\hat{N}$ の本征值 $n$ 常表量子~数，$\hat{a}^\dagger$ 称产生算符 $(s.t+1)$、$\hat{a}$ 称消灭算符

3) 对于厄米算符，对应不同本征值的本征矢正交

设 $\lambda_1, \lambda_2\ (\neq)$，$|a_1\rangle, |a_2\rangle$　$\hat{A}|a_1\rangle=\lambda_1|a_1\rangle$，$\hat{A}|a_2\rangle=\lambda_2|a_2\rangle$

取共轭，$\langle a_2|\hat{A}^\dagger=\langle a_2|\lambda_2^*$，$\hat{A}^\dagger=\hat{A}$，$\lambda_2^*=\lambda_2$．$\Rightarrow \langle a_2|\hat{A}|=\langle a_2|\lambda_2$，$\langle a_2|(\hat{A}-\lambda_2\hat{I})=0$

$\langle a_2|(\hat{A}-\lambda_2\hat{I})|a_1\rangle=\langle a_2|(\lambda_2-\lambda_1)\hat{I}|a_1\rangle=\underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0}\langle a_2|a_1\rangle=0 \Rightarrow \langle a_2|a_1\rangle=0$．正交✓

每个算符の本征矢构成一套正交(归一~~)基*

4) 以算符自身的正交本征矢为基来表示，矩阵是对角化，对角元为其全部本征值

设 $|e^{(i)}\rangle$ 是算符 $\hat{A}$ 全套正交归一本征矢，相应本征值为 $\lambda_i\ (i=1,2\cdots n)$

对角元 $A_{ii}=\langle e^{(i)}|\hat{A}|e^{(i)}\rangle=\lambda_i\langle e^{(i)}|e^{(i)}\rangle=\lambda_i$；非~ $A_{ij}=\lambda_j\langle e^{(i)}|e^{(j)}\rangle=0$

* 泡利矩阵是自旋算符 $2\hat{S}_x/\hbar$、$2\hat{S}_y/\hbar$、$2\hat{S}_z/\hbar$ の一种表示，

其以 $\hat{S}_z$ の本征矢 $|z+\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $|z-\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 为基．

例：求将泡利矩阵 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 对角化の幺正变换矩阵

$$\begin{cases}|x+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ |x-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{cases},\quad \begin{cases}|y+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\\ |y-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$U(x)=\begin{pmatrix}\langle z+|x+\rangle & \langle z+|x-\rangle\\ \langle z-|x+\rangle & \langle z-|x-\rangle\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=U^\dagger(x)$$

将 $\sigma_y$ 对角化的幺正矩阵为 $\begin{cases}U(y)=\begin{pmatrix}\langle z+|y+\rangle & \langle z+|y-\rangle\\ \langle z-|y+\rangle & \langle z-|y-\rangle\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\\ U^\dagger(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix}\end{cases}$

· 对易算符の共同本征矢

设 $\hat{A}, \hat{B}$ 对易：$[\hat{A},\hat{B}]=0$　令 $|\alpha\rangle$ 为 $\hat{A}$ の本征值为 $\alpha$ の本征矢，

则 $\hat{A}\hat{B}|\alpha\rangle=\hat{B}\hat{A}|\alpha\rangle=\hat{B}\alpha|\alpha\rangle=\alpha\hat{B}|\alpha\rangle$，即 $\hat{B}|\alpha\rangle$ 也是 $\hat{A}$ の~．

1° 非简并：$\hat{B}|\alpha\rangle=\beta|\alpha\rangle$，即 $|\alpha\rangle$ 也是 $\hat{B}$ の本征态，$\beta$ 为其本征值

2° 简并：略．

No.

Date

·幺正变换：变换矩阵T为幺正矩阵U的变换，如正交归一基的表示之间的变换

$|a\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i|e^{(i)}\rangle$，$|a\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_j'|e'^{(j)}\rangle$. 已知 $|e'^{(j)}\rangle=\sum_{i=1}^{n}|e^{(i)}\rangle T_{ij}$

$\sum_{j=1}^{n}T_{ij}a_j'=a_i$，$T\begin{pmatrix}a_1'\\ \vdots\\ a_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a_1'\\ \vdots\\ a_n'\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ $\begin{cases}T_{ij}=\langle e^{(i)}|e'^{(j)}\rangle\\ T^{-1}_{ji}=\langle e'^{(j)}|e^{(i)}\rangle\end{cases}$

由左右矢互换时内积取复共轭，结合~知 $T^{-1}_{ji}=T_{ij}^*$，T为幺正矩阵

§3. 本征值问题

·算符及其矩阵表示　　映射/操作：$|y\rangle=\hat{A}|x\rangle$

线性算符，满足：$\hat{A}k|x\rangle=k\hat{A}|x\rangle$ 与 $\hat{A}(|x_1\rangle+|x_2\rangle)=\hat{A}|x_1\rangle+\hat{A}|x_2\rangle$

选取一定的基，$\sum_{j=1}^{n}y_j|e^{(j)}\rangle=\sum_{j=1}^{n}\hat{A}|e^{(j)}\rangle x_j\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}y_j\langle e^{(i)}|e^{(j)}\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle e^{(i)}|\hat{A}|e^{(j)}\rangle x_j$

由正交归一条件，$y_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j$，式中 $A_{ij}=\langle e^{(i)}|\hat{A}|e^{(j)}\rangle$

$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\hat{A}\triangleq A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

被动观点：$\begin{cases}|e'^{(j)}\rangle=\sum_{k=1}^{n}|e^{(k)}\rangle U_{kj}\\ \langle e'^{(i)}|=\sum_{l=1}^{n}U^{+}_{il}\langle e^{(l)}|\end{cases}$，式中 $\begin{cases}U_{kj}=\langle e^{(k)}|e'^{(j)}\rangle\\ U^{+}_{il}=\langle e'^{(i)}|e^{(l)}\rangle\end{cases}$ 二者互为厄米共轭，矩阵为幺正矩阵.

$A'_{ij}=\langle e'^{(i)}|\hat{A}|e'^{(j)}\rangle=\sum_{k,l=1}^{n}U^{+}_{il}\langle e^{(l)}|\hat{A}|e^{(k)}\rangle U_{kj}=\sum_{k,l=1}^{n}U^{+}_{il}A_{lk}U_{kj}$，即 $A'=U^{+}AU$ (*)

对(*)取厄米共轭，$(A')^{+}=(U^{+}AU)^{+}=U^{+}A^{+}U$，得厄米性在幺正变换下保持.

故厄米共轭性不依赖于矩阵表示，为算符本身的性质，可以"$\hat{A}^{+}$"

·对偶矢量 $|a\rangle$. $\langle a|$ 互为厄米共轭. $\langle a|\hat{A}^{+}\hat{A}|a\rangle=\langle b|b\rangle=|b|^2\geq 0$. √

·本征值与本征矢：$\hat{A}|a\rangle=\lambda|x\rangle$，λ称本征值. $|x\rangle$称本征矢

$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}A_{11}-\lambda&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\ A_{21}&A_{22}-\lambda&\cdots&A_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$，有非零解：$\begin{vmatrix}A_{11}-\lambda&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$(本征方程)

$|A-\lambda I|=0$

对于n阶方阵A，有n个本征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$，对应n个本征矢.

性质：1) 幺正变换下，本征值不变　　$A'=U^{+}AU$，$UU^{+}=I$.

$|A'-\lambda I|=|U^{+}(A-\lambda I)U|=\underbrace{|U^{+}|}_{=1}|A-\lambda I|\underbrace{|U|}_{=1}=0\Leftrightarrow|A-\lambda I|=0$

2) 厄米矩阵的所有本征值都是实数(复数共轭=自身)

将上述$|b^{(i)}\rangle$换为正交归一基矢$|e^{(i)}\rangle$：$|a\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i|e^{(i)}\rangle$ (*)

依次乘以$\langle e^{(j)}|$，得$\langle e^{(j)}|a\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i\langle e^{(j)}|e^{(i)}\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i\delta_{ij}=k_j$

即$k_i=\langle e^{(i)}|a\rangle$ $(i=1,2\cdots n)$ —— $|a\rangle$对正交归一基矢展开之系数$k_i$=相应基矢与其の内积

代回(*)，得$|a\rangle=\sum_{i=1}^{n}|e^{(i)}\rangle\langle e^{(i)}|a\rangle$ (√)

形式地，有$\sum_{i=1}^{n}|e^{(i)}\rangle\langle e^{(i)}|=1$，"1"为单位算符

乘"1"表示执行某矢量按某正交归一基展开の运算

§2. 矩阵与线性变换

·矩阵及其运算法则 1)加法 2)数乘 3)乘法

4)转置和厄米~~共轭~~共轭：$(\widetilde{A})_{ij}=A_{ji}$，$(A^\dagger)_{ij}=A_{ji}^*$ ⇒ $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$

·方阵的运算 eg.泡利矩阵 $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=2i\sigma_z\neq0$$

·对易式(commutator)：$[A,B]\equiv AB-BA$

$[\sigma_x,\sigma_y]=2i\sigma_z$，$[\sigma_y,\sigma_z]=2i\sigma_x$，$[\sigma_z,\sigma_x]=2i\sigma_y$

·对角元≠0 ⇒ 对角(矩)阵 $\xrightarrow{\text{对角元}=1}$ 单位(矩)阵或幺矩阵：$IA=AI=A$

1)方阵の行列式：$|AB|=|A||B|$

2)方阵の逆：对于A，若∃B.B'.满足$BA=AB'=I$，则$B=B'$

B.B'称方阵A的逆，记作$A^{-1}$. 即$A^{-1}A=AA^{-1}=I$

$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}D_{kj}=|A|\delta_{ij}$ $(i=1,2\cdots n)$. $D_{kj}=(-1)^{k+j}M_{kj}$ ($A_{kj}$の余子式) ⇒ $(A^{-1})_{ij}=\frac{D_{ji}}{|A|}$ $|A|\neq0$!

3)厄米矩阵 —— $H^\dagger=H$，泡利矩阵都是厄米矩阵

幺正矩阵 —— $U^\dagger=U^{-1}$，泡利矩阵也是幺正矩阵

·线性变换及其矩阵表示：$T\begin{pmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

线性变换满足：$T^{-1}k\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=kT^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 且 $T^{-1}\left[\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right]=T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+T^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

# 附录：线性代数

## §1. 矢量空间

·(n维)对偶矢量：$(a_1^*, a_2^* \cdots a_n^*) \Leftarrow$ 对偶 $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \triangleq |a\rangle$ 右矢

左矢 $\langle a| \triangleq$

·基本运算 1) 加法 $|a\rangle + |b\rangle = |a+b\rangle$ 交换律✓ 结合律✓

2) 数乘 $k|a\rangle \triangleq k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 分配律✓

3) 内积 (inner product)

$\langle b|a\rangle = (b_1^*, b_2^* \cdots b_n^*)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \equiv b_1^* a_1 + b_2^* a_2 + \cdots + b_n^* a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i^* a_i$

显然：$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$ 注：内积与坐标选取无关

模方：$\langle a|a\rangle \equiv a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + \cdots + a_n^* a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i \geq 0$

模：$|a| \equiv \sqrt{\langle a|a\rangle}$ ；零矢量：$0$（简写）

·矢量の线性相关性

若∃ $k_1, k_2 \cdots k_m$ 不全为0, s.t. $\sum_{i=1}^{m} k_i |a^{(i)}\rangle = 0$（零矢量）

则称这m个n维矢量是线性相关の. 反之，线性无关.

·线性相关性の判断

(1) $m=n$. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \cdots & a_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$，则~无非零解，线性无关

(2) $m>n$，必有非零解，必线性相关 (3) $m<n$，具体分析

·n维矢量空间

矢量 $|a\rangle$、$\langle b|$ の内积 $\langle a|b\rangle = 0$，称它们是"正交"的 ；内积空间

·内积空间の积

n维矢量空间中，最多可取n个线性无关の矢量组 $|b^{(1)}\rangle, |b^{(2)}\rangle, \cdots, |b^{(n)}\rangle$

则 $\forall |a\rangle$，$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i |b^{(i)}\rangle$ ，则该组 $|b^{(i)}\rangle$ 称矢量空间の基（或基矢）

·正交归一基矢：$|e^{(i)}\rangle$ $(i=1,2\cdots n)$

满足 $\langle e^{(i)}|e^{(j)}\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ (i\neq j) & \text{正交性} \\ 1 \ (i=j) & \text{归一性} \end{cases}$

即这些基矢彼此正交，且具有单位模

Campus

高斯函数与高斯积分 $f(x)=Ae^{-ax^2}$ —高斯函数

$\Gamma_n=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax^2}dx\,(a>0,n=1,2,3\ldots)\xrightarrow[x=z^{\frac12}]{z=x^2}\Gamma_n=\frac12\int_0^\infty z^{\frac n2-1}e^{-az}dz\,(n=1,2,3\ldots)$

$\Gamma_1=\frac{\sqrt\pi}{2a^{\frac12}}$, $\Gamma_2=\frac{1}{2a}$, $\Gamma_3=\frac{\sqrt\pi}{4a^{\frac32}}$, $\Gamma_4=\frac{1}{2a^2}$ ……

推导：$\frac{\partial}{\partial a}\int x^n e^{-ax^2}dx=-\int x^{n+2}e^{-ax^2}dx$，即 $\Gamma_n=-\frac{\partial}{\partial a}\Gamma_{n-2}$

1) $\int xe^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}+C$, $\Gamma_2=\frac{1}{2a}$ ✓

2) $\Gamma=\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}d\theta\, e^{-ar^2}=2\pi\Gamma_2$

$\Gamma=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{-a(x^2+y^2)}=4\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-ay^2}dy=4\Gamma_1^2$ $\Rightarrow \Gamma_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}\Gamma_2}$ ✓

· 傅里叶变换

为对非周期函数作频谱分解，进行傅里叶积分变换.

正变换：$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{ikx}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}$

逆变换：$F(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$，$F(k)$是$f(x)$の频谱

一般说来，频谱宽度与波列长度成反比

1) 方垒型波列 $f(x)=\begin{cases}Ae^{ik_0x}, & |x|\le a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$

$F(k)=\int_{-\frac a2}^{\frac a2}e^{-i(k-k_0)x}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}=\frac{Aa}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\beta}{\beta}$ $[\beta=(k-k_0)\frac a2]$

$\beta=\pm\pi$, $F(k)=0$. "主极强"$[-\pi,\pi]$. def 频谱宽度 $\Delta k=\frac{4\pi}{a}$

波列长度 $\Delta x=a$，$\Delta k\cdot\Delta x=4\pi$.

2) 指数型波列 $f(x)=Ae^{-a|x|}e^{ik_0x}$

$F(k)=A[\int_0^\infty e^{-ax}e^{-i(k-k_0)x}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}+\int_{-\infty}^0 e^{ax}e^{-i(k-k_0)x}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}]$

$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}[\frac{-1}{-a-i(k-k_0)}+\frac{1}{a-i(k-k_0)}]=\frac{2aA}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(k-k_0)^2+a^2}$

频谱为以$k=k_0$为中心の洛伦兹型谱线. $k-k_0=\pm a\to$峰值の一半

def 谱宽 $\Delta k=2a$. 波列长度 def: $\Delta x=\frac{2}{a}$. $\Delta k\cdot\Delta x=2$

3) 高斯型波列 $f(x)=Ae^{-ax^2}e^{ik_0x}$

$F(k)=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{-i(k-k_0)x}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}=Ae^{-\frac{(k-k_0)^2}{4a}}\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-i(k-k_0)x+\frac{(k-k_0)^2}{4a^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

$\xlongequal{y=\frac{x+i(k-k_0)}{2a}}Ae^{-\frac{(k-k_0)^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ay^2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}=\frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4a}}$

频谱为以$k=k_0$为中心の高斯型谱线. 以波数の方差定义谱宽：

def: $\Delta x=\sqrt{\overline{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，$\Delta k=\sqrt{\overline{(k-k_0)^2}}=\sqrt{2a}$，$\Delta k\Delta x=1$