

基于样卷的大学物理复习法 ()

1. 康普顿散射 (X 射线章节)

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \text{能量守恒 } E + m_e c^2 &= E' + E_e \\ \text{动量守恒 } \vec{p}_e + \vec{p}' &= \vec{p} \end{aligned}$$

其中

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 \quad p_e^2 = p^2 - 2pp' \cos \varphi + p'^2$$

且

$$E = cp \quad E' = cp'$$

联立解得

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1 - \cos \varphi}{m_e c}$$

即

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

2. 薛定谔方程 (量子力学初步, 势垒, 势阱)

① 一维谐振子

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t)$$

当势与时间无关, 分离变量得到定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

考虑一维谐振子, $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, ∇ 取为 $\frac{d}{dx}$

概率解释给出边界条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$$

方程退化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = 0$$

给出近似解

$$\tilde{\psi}(x) = \exp\left(\pm \frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

由边界条件消去+项, 引入 $\chi(x) = \tilde{\psi}(x) \chi(x)$, 代回定态薛定谔方程, 得到

$$\frac{\hbar^2}{2m} \chi''(x) - \hbar\omega x \chi'(x) + \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) \chi(x) = 0$$

取级数解

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

代入得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (n+2)(n+1)C_{n+2}x^n - \hbar\omega C_n x^n + \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) C_n x^n \right] = 0$$

比较系数得到

$$\frac{\hbar^2}{2m} (n+2)(n+1)C_{n+2} + \left[E - \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] C_n = 0$$

为递推式, 对于不同的情况讨论

① 给定 $C_0 = 1, C_1 = 0 \Rightarrow$ 奇数项全为 0, 偶数项发散, 前两项

$$\frac{\hbar}{2m} \cdot 2C_2 + \left(E - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) C_0 = 0$$

$$\frac{\hbar}{2m} \cdot 6C_3 + \left(E - \frac{3}{2}\hbar\omega\right) C_1 = 0$$

当 $|x| \rightarrow \infty, \psi(x)$ 为指数形式, 无穷处发散, 这是不允许的, 需要在途中某一项截断, 一个很显然的截断方式为 $C_2 = 0$, 此时偶项全 0, $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$

则

$$\Phi_0(x) = A_0 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

其中 A_0 为归一化系数

② 给定 $C_0 = 0, C_1 = 1 \Rightarrow$ 此时偶数项全为 0

同理的截断 $E = E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, 大于 1 的奇数项全为 0

类比地归纳, 当 $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $\chi(x)$ 级数解在某项开始截断

定义厄米多项式 $\chi_n(x) = H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$, 则

$$\Phi_n(x) = A_n \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

归一化系数

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

相应能级

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

② 一维方势阱

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

无穷深 ($-\infty < 0 < \infty$, 阱壁 $x = 0, x = a$)

阱中

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

阱外 (不确定度被无穷压制, 不计隧穿)

$$\psi(x) = 0$$

阱中解出

$$\psi_{\pm}(x) = \exp\left(\pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right)$$

波函数的连续性要求，对线性叠加解 $\psi(x) = C_1 \psi_+(x) + C_2 \psi_-(x)$

$$\psi(0) = C_1 + C_2 = 0$$

则

$$\psi(x) = C_1 \left[\exp\left(+i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right) - \exp\left(-i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right) \right] = D \sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x$$

且 $\psi(a) = 0$ ，于是

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$\psi_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi}{a} x$$

归一化后

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

有限深 ($V_0 > 0$ ，阱壁 $x = -\frac{a}{2}, x = \frac{a}{2}$)

从左到右 1, 2, 3 区

2 区：

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_2(x) = 0$$

$$\psi_2(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

1, 3 区：

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0$$

我们关心的是束缚态 ($E < V_0$)

$$\psi_1 = e^{\lambda x} \text{ 代入, } \lambda^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} := \beta^2$$

有两个解，根据 1, 3 区在无穷处（区分正负无穷）特征，得到

$$\psi_1 = A e^{\beta x}$$

$$\psi_3 = B e^{-\beta x}$$

根据波函数在 $x = -\frac{a}{2}, x = \frac{a}{2}$ 处的连续性以及导函数的连续性，得到

$$\begin{cases} A e^{\frac{a}{2}\beta} = C_1 e^{\frac{a}{2}ik} + C_2 e^{\frac{a}{2}ik} \\ B e^{-\frac{a}{2}\beta} = C_1 e^{\frac{a}{2}ik} + C_2 e^{\frac{a}{2}ik} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta A e^{\frac{a}{2}\beta} = ikC_1 e^{\frac{a}{2}ik} - ikC_2 e^{\frac{a}{2}ik} \\ -\beta B e^{\frac{a}{2}\beta} = ikC_1 e^{\frac{a}{2}ik} - ikC_2 e^{-\frac{a}{2}ik} \end{cases}$$

得到

$$-\beta = ik \frac{C_1 e^{ik\frac{a}{2}} - C_2 e^{-ik\frac{a}{2}}}{C_1 e^{ik\frac{a}{2}} + C_2 e^{-ik\frac{a}{2}}}$$

以及

$$\beta = ik \frac{C_1 e^{-ik\frac{a}{2}} - C_2 e^{ik\frac{a}{2}}}{C_1 e^{-ik\frac{a}{2}} + C_2 e^{ik\frac{a}{2}}}$$

则

$$C_1 = \pm C_2$$

当 $C_1 = C_2$

$$\beta = k \tan \frac{ka}{2}$$

$$\text{令 } \frac{ka}{2} = \xi, \frac{\beta}{a} = \eta$$

则

$$\begin{cases} \eta = \xi \tan \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4}(k^2 + \beta^2) = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \end{cases}$$

给出数值解，归一化系数可以被确定， $A=B$ 由偶宇称确定

当 $C_1 = -C_2$

$$\begin{cases} \eta = -\xi \cot \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4}(k^2 + \beta^2) = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \end{cases}$$

给出数值解，归一化系数可以确定， $A+B=0$ 由奇宇称确定

③算符

归一化

$$\int \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

力学量的平均

$$\langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle = \int \Psi^*(x) \hat{f} \Psi(x) dx$$

不确定度

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \left[\int \Psi^*(x) \hat{f}^2 \Psi(x) dx - \left(\int \Psi^*(x) \hat{f} \Psi(x) dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

3. 费米统计与玻色统计 (量子统计)

费米子：半整数自旋，满足泡利不相容原理

玻色子：整数自旋

费米统计(对电子, $g_s = 2s + 1 = 2$)

N 个电子在 k 空间填充半径为 k_F 的球, 球内包含的状态数恰好为 N

$$N = g_s \frac{\frac{4}{3}\pi k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = V \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$$

态密度

$$g(E)dE = (2s + 1) \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

在零温度下,

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

仅在 $E < \mu$ 有分布, 记为 $\theta(E - E_F)g(E)dE$

平均能量

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E \theta(E - E_F) g(E) dE}{\int_0^\infty \theta(E - E_F) g(E) dE} = \frac{\int_0^{E_F} E^{\frac{3}{2}} dE}{\int_0^{E_F} E^{\frac{1}{2}} dE} = \frac{3}{5} E_F$$

玻色统计(光子)

分布

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E - \mu)} - 1}$$

频率空间态密度

$$D(\nu) d\nu = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

数学补充

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\nu)\zeta(\nu)$$

4. 核物理(主要是半衰期)

半衰期

$$\frac{dN}{N} = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

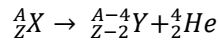
若有恒速 R 的粒子源

$$\frac{dN}{N} = -\lambda t + R$$

初始条件 $N(t=0) = 0$

$$N = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

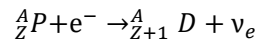
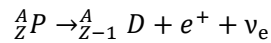
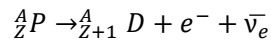
α 衰变



衰变能

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2$$

β 衰变



衰变能依次为

$$Q = (m_P + m_e - m_D - m_e)c^2 = (m_P - m_D)c^2$$

$$Q = (m_P - m_D - m_e - m_e)c^2 = (m_P - m_D - 2m_e)c^2$$

$$Q = (m_P + m_e - m_D - m_e)c^2 = (m_P - m_D)c^2$$

反冲能动能

$$p_A = p_\gamma = \frac{h\nu}{c} \quad E_A = \frac{p_A^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2}$$

5. 粒子物理与对称性

守恒律

电荷守恒

重子数守恒

奇异数守恒（强相互作用和电磁作用不变，弱相互作用可以变一个单位）

CPT 对称

电荷正负共轭变换

宇称变换（注意极矢量与轴矢量）

时间反演变换

能否在自然发生？ \Rightarrow 结论：xx 对称性破缺

（从上到下）分别寻找

反粒子手性的错误

镜像与实验的结果不符