基于样卷的大学物理复习法（）

1. 康普顿散射（X 射线章节）

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

推导过程：

$$能量守恒 E + m_e c^2 = E' + E_e$$
$$动量守恒 \overrightarrow{p_e} + \overrightarrow{p'} = \vec{p}$$

其中

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 \qquad p_e^2 = p^2 - 2pp'\cos\varphi + p'^2$$

且

$$E = cp \qquad E' = cp'$$

联立解得

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1 - \cos\varphi}{m_e c}$$

即

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

2. 薛定谔方程（量子力学初步，势垒，势阱）

①一维谐振子

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

当势与时间无关，分离变量得到定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

考虑一维谐振子，$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, ∇取为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$

概率解释给出边界条件

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0$$

方程退化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = 0$$

给出近似解

$$\widetilde{\psi}(x) = exp\left(\pm\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

由边界条件消去+项，引入$\phi(x) = \widetilde{\psi}(x)\chi(x)$, 代回定态薛定谔方程，得到

$$\frac{\hbar^2}{2m}\chi''(x) - \hbar\omega x\chi'(x) + \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right)\chi(x) = 0$$

取级数解

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

代入得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\hbar^2}{2m}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n-\hbar\omega nC_nx^n+\left(E-\frac{\hbar\omega}{2}\right)C_nx^n\right]=0$$

比较系数得到

$$\frac{\hbar^2}{2m}(n+2)(n+1)C_{n+2}+\left[E-\hbar\omega\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)\right]C_n=0$$

为递推式，对于不同的情况讨论

①给定$C_0=1,C_1=0\Rightarrow$奇数项全为 0，偶数项发散，前两项

$$\frac{\hbar}{2m}\cdot 2C_2+\left(E-\frac{1}{2}\hbar\omega\right)C_0=0$$

$$\frac{\hbar}{2m}\cdot 6C_3+\left(E-\frac{3}{2}\hbar\omega\right)C_1=0$$

当$|x|\to\infty,\psi(x)$为指数形式，无穷处发散，这是不允许的，需要在途中某一项截断，一个很显然的截断方式为$C_2=0$，此时偶项全 0，$E=\frac{1}{2}\hbar\omega$

则

$$\phi_0(x)=A_0\,exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

其中A_0为归一化系数

②给定$C_0=0,C_1=1\Rightarrow$此时偶数项全为 0

同理的截断$E=E_1=\left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$，大于 1 的奇数项全为 0

类比地归纳，当$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\chi(x)$级数解在某项开始截断

定义厄米多项式$\chi_n(x)=H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$，则

$$\phi_n(x)=A_n\,exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$$

归一化系数

$$A_n=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}2^nn!}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}$$

相应能级

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

②一维方势阱

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

<u>无穷深</u>（$\infty\quad 0\quad\infty$，阱壁$x=0,x=a$）

阱中

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x)=E\psi(x)$$

阱外（不确定度被无穷压制，不计隧穿）

$$\psi(x)=0$$
阱中解出
$$\psi_{\pm}(x)=exp\left(\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}}\mathrm{x}\right)$$
波函数的连续性要求，对线性叠加解$\psi(\mathrm{x})=C_1\psi_+(x)+C_2\psi_-(x)$
$$\psi(0)=C_1+C_2=0$$
则
$$\psi(x)=C_1\left[exp\left(+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}}\mathrm{x}\right)-exp\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}}x\right)\right]=D\,sin\,\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x$$
且$\psi(a)=0$，于是
$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$
$$\psi_n(x)=D_n\,sin\,\frac{n\pi}{a}x$$
归一化后
$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\,sin\,\frac{n\pi}{a}x$$

<u>有限深</u>（$\mathrm{V}_0\quad 0\quad \mathrm{V}_0$，阱壁$x=-\frac{a}{2},x=\frac{a}{2}$）

从左到右 1, 2，3 区
2 区：
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\psi_2(\mathrm{x})+\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}\psi_2(\mathrm{x})=0$$
$$\psi_2(x)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}}+C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}},k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$
1, 3 区：
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\psi_1(\mathrm{x})+\frac{2\mathrm{m}(\mathrm{E}-V_0)}{\hbar^2}\psi_1(\mathrm{x})=0$$
我们关心的是束缚态($E<V_0$)

$\psi_1=\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{x}}$代入，$\lambda^2=\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}:=\beta^2$

有两个解，根据 1, 3 区在无穷处（区分正负无穷）特征，得到
$$\psi_1=A\mathrm{e}^{\beta\mathrm{x}}$$
$$\psi_3=B\mathrm{e}^{-\beta\mathrm{x}}$$
根据波函数在$x=-\frac{a}{2},x=\frac{a}{2}$处的连续性以及导函数的连续性，得到
$$\begin{cases}A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}}{2}\beta}=C_1\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}}{2}\mathrm{ik}}+C_2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{a}}{2}\mathrm{ik}}\\ B\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}}{2}\beta}=C_1\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{a}}{2}\mathrm{ik}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}}{2}\mathrm{ik}}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta A e^{-\frac{a}{2}\beta} = ikC_1 e^{-\frac{a}{2}ik} - ikC_2 e^{\frac{a}{2}ik} \\ -\beta B e^{-\frac{a}{2}\beta} = ikC_1 e^{\frac{a}{2}ik} - ikC_2 e^{-\frac{a}{2}ik} \end{cases}$$

得到

$$-\beta = ik\frac{C_1 e^{ik\frac{a}{2}} - C_2 e^{-ik\frac{a}{2}}}{C_1 e^{ik\frac{a}{2}} + C_2 e^{-ik\frac{a}{2}}}$$

以及

$$\beta = ik\frac{C_1 e^{-ik\frac{a}{2}} - C_2 e^{ik\frac{a}{2}}}{C_1 e^{-ik\frac{a}{2}} + C_2 e^{ik\frac{a}{2}}}$$

则

$$C_1 = \pm C_2$$

当$C_1 = C_2$

$$\beta = k\,tan\ \frac{ka}{2}$$

令$\frac{ka}{2} = \xi, \frac{\beta}{a} = \eta$

则

$$\begin{cases} \eta = \xi\,tan\ \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4}(k^2 + \beta^2) = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \end{cases}$$

给出数值解，归一化系数可以被确定，A=B 由偶宇称确定

当$C_1 = -C_2$

$$\begin{cases} \eta = -\xi\,cot\ \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4}(k^2 + \beta^2) = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2} \end{cases}$$

给出数值解，归一化系数可以确定，A+B=0 由奇宇称确定

③算符

归一化

$$\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

力学量的平均

$$<\psi|\hat{f}|\psi> = \int \psi^*(x)\hat{f}\psi(x)\,dx$$

不确定度

$$\Delta E = \sqrt{<E^2> - <E>^2} = \left[\int \psi^*(x)\,\hat{f}^2\psi(x)\,dx - \left(\int \psi^*(x)\hat{f}\psi(x)\,dx\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

3. 费米统计与玻色统计（量子统计）

费米子：半整数自旋，满足泡利不相容原理

玻色子：整数自旋

费米统计(对电子，$g_s = 2s+1 = 2$)
N个电子在k空间填充半径为k_F的球，球内包含的状态数恰好为N

$$N = g_s \frac{\frac{4}{3}\pi k_F^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = V\frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$$

态密度

$$g(E)\mathrm{d}E = (2s+1)\frac{4\pi k^2 \mathrm{d}k}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

在零温度下，

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

仅在$E < \mu$有分布，记为$\theta(E-E_F)g(E)\mathrm{d}E$
平均能量

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E\theta(E-E_F)g(E)\mathrm{d}E}{\int_0^\infty \theta(E-E_F)g(E)\mathrm{d}E} = \frac{\int_0^{\mathrm{E_F}} E^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}E}{\int_0^{\mathrm{E_F}} E^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}E} = \frac{3}{5}E_F$$

玻色统计（光子）
分布

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta}(E-\mu) - 1}$$

频率空间态密度

$$D(\nu)\mathrm{d}\nu = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu$$

数学补充

$$\int_0^\infty \frac{x^{v-1}}{e^x - 1} = \Gamma(v)\zeta(v)$$

4. 核物理（主要是半衰期）
半衰期

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda t$$

$$\lambda = \frac{ln\,2}{t_{\frac{1}{2}}}$$

若有恒速 R 的粒子源

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=-\lambda t+R$$

初始条件$N(t=0)=0$

$$N=\frac{R}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$$

α 衰变

$$^{A}_{Z}X\rightarrow\ ^{A-4}_{Z-2}Y+^{4}_{2}He$$

衰变能

$$Q=(m_X-m_Y-m_\alpha)c^2$$

β 衰变

$$^{A}_{Z}P\rightarrow^{A}_{Z+1}D+e^-+\bar{\nu_e}$$
$$^{A}_{Z}P\rightarrow^{A}_{Z-1}D+e^++\nu_\mathrm{e}$$
$$^{A}_{Z}P+\mathrm{e}^-\rightarrow^{A}_{Z+1}D+\nu_e$$

衰变能依次为

$$Q=(m_P+m_e-m_D-m_e)c^2=(m_P-m_D)c^2$$
$$Q=(m_P-m_D-m_\mathrm{e}-m_e)c^2=(m_P-m_D-2m_\mathrm{e})c^2$$
$$Q=(m_P+m_e-m_D-m_\mathrm{e})c^2=(m_P-m_D)c^2$$

反冲能动量

$$p_A=p_\Upsilon=\frac{h\nu}{c}\qquad E_A=\frac{p_A^2}{2m}=\frac{E_\Upsilon^2}{2mc^2}$$

5.粒子物理与对称性

守恒律

电荷守恒

重子数守恒

奇异数守恒（强相互作用和电磁作用不变，弱相互作用可以变一个单位）

CPT 对称

电荷正负共轭变换

宇称变换（注意极矢量与轴矢量）

时间反演变换

能否在自然发生？⇒结论：xx 对称性破缺

（从上到下）分别寻找

反粒子手性的错误

镜像与实验的结果不符