南京大学　　系实验报告

题目＿＿＿＿＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿＿＿　＿＿＿＿年＿＿月＿＿日　第＿＿＿页

第7章 定解问题 [初探]

三类方程 { 双曲型 波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$.
抛物型 输运方程 $u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$
椭圆型 泊松方程 $-\Delta u=F(x,y,z)$

1. 建立方程
2. 寻找定解条件 { 初始
边界 三种类型.
衔接 —是否需要衔接条件?决运动过程中有无跃变点.
3. 数物方程的分类 ——化简.
4. 达朗贝尔公式:变量代换思想
求解 齐次 波动方程 无边界条件(or半无界).

第8章 分离变数法 ⇒ [一维情况.直角坐标] [方程需为线性]

$\boxed{\text{齐次方程、齐次边界条件}}$ $\xrightarrow[\text{冲量定理法}]{\text{本征函数法}}$ $\boxed{\text{非齐次方程 齐次边界条件}}$ $\xrightarrow[\text{满足边界条件}]{\text{取一特殊函数}}$ $\boxed{\text{非齐次边界条件}}$

—→ $\boxed{\text{一般问题}}$ (有界区域)

1. 含时问题
(1) 边界条件齐次化
(2). 化为两个定解问题(齐次方程.任意初值 + 非齐次方程.0初值)
(分离变数法)　(冲量定理法).

2. 稳定场问题
(1). 方程齐次化(取特解满足方程)
(2). 拆成两个问题

分离变数法：①空间方程+齐次边条→本征值问题

此处方程一般为 $X''+\lambda X=0$. 最一般 $X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$

边界
- 第一类 $\lambda>0$. $X_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi}{L}x$, $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.
- 第二类 $\lambda\geq 0$. $\begin{cases}\lambda=0 & X_0(x)=A_0\\ \lambda>0. & X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{L}x \quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.\end{cases}$
- 第一、二类混合 $\lambda>0$. $\lambda_n=\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2$ $X_n=A\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x$

  $(u|_{x=0}=0.\ u_x|_{x=L}=0)$
- 第三类 $\lambda>0$ 本征值由 $\cot\sqrt{\lambda}L=h\sqrt{\lambda}$ 给出. $\lambda_n=\frac{\mu_n^2}{L^2}$ $X_n=A_n\cos\frac{\mu_n}{L}x$

  $u_x|_{x=0}=0.\ (u+hu_x)|_{x=L}=0$ $(\cot\mu=k\mu\to\pm\mu_1,\pm\mu_2,\cdots)$

②将 λ_n 代回时间函数，求得 $T_n(t)$.

③组合出一般解 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nT_n(t)X_n(x)$

④使用剩下的定解条件确定上式中系数.

本征函数法：①得到本征函数集(空间函数的)

(基本类型的本征函数集如上，此外的需用分离变数法求解).

②将待求函数&非齐次项用本征函数展开

③令系数相等.得到关于 $T_n(t)$ 的 ode+零初始条件

④用Laplace变换求解.

冲量定理法：$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau)\\ \text{边界齐次}\\ v|_{t=0}=v_t|_{t=0}=0\end{cases}$ $\to$ $\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=0\\ \text{齐次边条}\\ v|_{t=0}=0.\ v_t|_{t=0}=f(x,\tau)\end{cases}$ $\to v(x,t;\tau)$

$\to u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$

※以上两方法前提：零初始条件.一般初始条件时拆成两个问题.

第9章 [三维、球、柱坐标下三类方程的求解]

微分算子 1、球坐标

$$\nabla=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

2、柱坐标

$$\nabla=\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

一、Laplace方程

(一)球坐标

φ方向：$\Phi''+\lambda\Phi=0$ + 周期性边条

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi.\quad \lambda_m=m^2\quad m=0,1,\cdots$$

θ方向：$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0\qquad x=\cos\theta\in[-1,1]$

(连带)勒让德方程

+自然边条($x=\pm1$ or $\theta=0,\pi$ 有限).

$$\Theta(\theta)=y(x)=P_l^m(x).\qquad \mu=l(l+1)$$

R方向：$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-l(l+1)R=0.$

欧拉方程

$$R(r)=Cr^l+Dr^{-(l+1)}$$

组合.确定系数 —— 广义Fourier级数展开

(二)柱坐标

φ方向：$\Phi''+\lambda\Phi=0$ + 周期边条

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi\quad \lambda_m=m^2,\quad m=0,1,\cdots$$

z方向齐次边条：

+$Z''-\mu Z=0$

$\mu<0$ (=0). 令$-\mu=h^2$.

$Z(z)=A\cos hz+B\sin hz$

$h_n=\cancel{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ ------

ρ方向：

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0$$

$\downarrow x=\sqrt{\mu}\rho$

$$x^2R''+xR'-(x^2+m^2)R=0$$

虚宗量Bessel方程

$$R(\rho)=CI_m(h\rho)+DK_m(h\rho)$$

ρ方向齐次边条：$\mu\geq0$.

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0$$

$\downarrow x=\sqrt{\mu}\rho$

$$x^2R''+xR'+(x^2-m^2)R=0.$$

m阶Bessel方程

第一类 $R(\rho_0)=J_m(\sqrt{\mu}\rho_0)=J_m(x)=0$

零点序列 $x_n^{(m,1)}$，$\mu_n^{(m)}=\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\right)^2$

第二类 $J_m'(x)=0\quad x_n^{(m,2)}$

第三类 $J_m(\sqrt{\mu}\rho_0)+H\sqrt{\mu}J_m'(\sqrt{\mu}\rho_0)=0\quad x_n^{(m,3)}$

$\mu_n^{(m)}=\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\right)^2$. $R(\rho)=AJ_m\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho\right)+BN_m\left(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho\right)$

z方向：$Z''-\mu Z=0.$

$Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}$

单独讨论 $\mu=0$：

$$Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\z\end{Bmatrix} \quad R_0(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\\ln\rho\end{Bmatrix},\ R_m(\rho)=\begin{Bmatrix}\rho^m\\\rho^{-m}\end{Bmatrix}\ (m\neq 0)$$

最后组合。

二、Helmholtz方程 $(k\neq 0)$

(一) 球坐标

φ、θ方向同Laplace方程。

$$\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta)$$

R方向：$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$ 球Bessel方程

$\downarrow$ ~~$kr=x$, $R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$~~

$$R(r)=\begin{Bmatrix}j_l(kr)\\n_l(kr)\end{Bmatrix}$$

(二) 柱坐标、

φ方向同前。

$$\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix} \quad \lambda=m^2 \quad m=0,1,\cdots$$

因还有一维时间，本征值问题+1，需ρ、z方向齐次边值。

z方向 $\mu\leq 0$

$\mu<0$：令$\mu=-h^2$， $\mu=0$

$$\begin{Bmatrix}\cos hz\\\sin hz\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}1\\z\end{Bmatrix}$$

ρ方向 $R''+\frac{1}{\rho}R'+(k^2+\mu-\frac{m^2}{\rho^2})R=0$.

$\downarrow x=\sqrt{k^2+\mu}\,\rho$

$x^2R''+xR'+(x^2-m^2)R=0$.

$$R(\rho)=\begin{Bmatrix}J_m(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)\\N_m(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)\end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{齐次边值}} k_p\cdots$$

$\boxed{\text{k=0时，在两个齐次边值下求解Laplace方程。}}$

三、波动、~~扩散~~方程

$$T_0(t)=\begin{Bmatrix}1\\t\end{Bmatrix} \quad T_k(t)=\begin{Bmatrix}\cos kat\\\sin kat\end{Bmatrix}\ (k\neq 0)$$

四、扩散方程

$$T_k(t)=e^{-k^2a^2t}$$

五、二阶 ode 的级数解法 $\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$.

(一). 常点邻域上. 初值 $w(z_0)=C_0$. $w'(z_0)=C_1$.

$p(z)$. $q(z)$ 都在 z_0 及其邻域解析.

$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$, $p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m$. $q(z)=C_n(z-z_0)^n$

代回方程, 系数为0:

$$\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}b_m(k-m+1)a_{k-m+1}+\sum_{n=0}^{k}C_n a_{k-n}\right]=0.$$

系数递推.

(二). 奇点邻域上.

$p(z)$ 最多一阶极点. $q(z)$ 最多二阶极点.

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{s+k}$$

$$p(z)=\sum_{l=-m}^{\infty}p_l z^l=\sum_{l=0}^{\infty}p_{l-m}z^{l-m} \quad m\text{阶极点}$$

$$q(z)=\sum_{l=0}^{\infty}q_{l-n}z^{l-n}$$

最低次幂项系数为0, $m\le 1$. $n\le 2$ 时.

$\boxed{s(s-1)+s p_{-1}+q_{-2}=0}$ 指标方程 $\to s$.

$\to$ 递推关系.

六. 本征值问题

施图姆-刘维尔方程: $\frac{d}{dx}\left[\underbrace{k(x)}\frac{dy}{dx}\right]-\underbrace{q(x)}y+\lambda\underbrace{\rho(x)}_{\text{权重}}y=0$.

系数一致

正交、模、广义 Fourier 级数.

第十章 [勒让德多项式]

1. 三种表示

$$\begin{cases} P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!\,2^l (l-k)!\,(l-2k)!} x^{l-2k} \\ = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

2. 特殊点函数值

$P_l(1) = 1.$

$P_l(-1) = (-1)^l$

$P_{2n+1}(0) = 0.$ $\quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!\,2^n n!}$

3. 模 $N_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$

4. 广义傅级数 $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)$. $f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x) dx$

5. 递推式 $(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0$

6. 母函数

7. 正交关系 —— ……

[连带勒让德函数]

1. 三种表示

$$\begin{cases} P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x) \qquad m = 0, 1, \cdots, l. \\ = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \\ = \frac{i^{-m}}{2\pi} \frac{(l+m)!}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\psi} [x + i\sqrt{1-x^2}\cos\psi]^l d\psi \end{cases}$$

2. 正交关系

3. 模 $(N_l^m)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$

4. 广义傅级数 $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l^m(x)$. $f_l = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l^m(x) dx$ $(l \geq m)$

[球函数]

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, \cdots, l \\ l = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

1. 正交关系 $\iint_S Y_l^m Y_k^n \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0 \quad m \neq n \text{ or } l \neq k.$

2. 模 $(N_l^m)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2\pi\delta_m}{2l+1}$ $\left(\delta_m = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases}\right).$

3. 广义傅级数 $f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta)$

第十一章 柱函数

~~$J_m(x)$, $N_m(x)$, H~~

三类Bessel方程
- Bessel方程 $\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+(1-\frac{m^2}{x^2})R=0$
- 虚宗量Bessel方程 $\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-(1+\frac{m^2}{x^2})R=0$
- 球Bessel方程 $\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$

一、柱函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$H_\nu(x)=J_\nu(x)\pm iN_\nu(x)$$

1. 渐近特性

$x\to0$ $\boxed{J_0\to1.\quad J_\nu\to0}$ $J_{-\nu}\to\infty$

$N_0\to-\infty$ $N_\nu\to\pm\infty$.

$x\to\infty$ $\boxed{J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\to0}$.

2. 递推式 三种函数相同. Z_ν.

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)]=x^\nu Z_{\nu-1}(x).\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

$$Z_\nu'+\frac{\nu Z_\nu}{x}=Z_{\nu-1}\qquad Z_\nu'-\frac{\nu Z_\nu}{x}=-Z_{\nu+1}$$

$$Z_{\nu-1}-Z_{\nu+1}=2Z_\nu'\qquad Z_{\nu+1}+Z_{\nu-1}-\frac{2\nu Z_\nu}{x}=0.$$

3. 正交关系

$J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 有三个本征值序列(根据边界条件)

对于一个序列,有

$$\int_0^a J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l^{(m)}}\rho)\rho\,d\rho=0\quad,\ n\neq l.$$

4. 模

第一类 $(N_n^{(m)})^2=\frac{a^2}{2}[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2.$

二 $(N_n^{(m)})^2=\frac{1}{2}(a^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}})[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2$

三 $(N_n^{(m)})^2=\frac{1}{2}(a^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}+\frac{a^2}{\mu_n^{(m)}H^2})[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}a)]^2.$

5. 广义傅级数

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho), \quad f_n=\frac{1}{(N_n^m)^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho) J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho\, d\rho$$

计算技巧：$\int x^{-m} J_{m+1} dx = -x^{-m} J_m + C.$

$$\int J_1 dx = -J_0 + C.$$

$$\int x^m J_{m-1} dx = x^m J_m + C.$$

6. 母函数

7.

二、虚宗量Bessel函数

$$I_\nu(x)=i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$I_m(x)$

$$K_m(x)=\lim_{\nu\to m} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

1. 渐近特性

$x\to 0$ $\quad \boxed{I_0\to 1. \quad I_m\to 0.} \quad K_m\to\infty$

$x\to\infty$ $\quad I_m\to\infty. \quad \boxed{K_m\to\frac{\pi}{2\sqrt{x}}e^{-x}\to 0}$

三、球Bessel函数

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$$h_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

$x\to 0.$ $\quad \boxed{j_0(0)=1. \quad j_l(0)=0.} \quad n_l\to\infty$

$x\to\infty$ $\quad \boxed{j_l\sim\frac{1}{x}\cos(x-\frac{l+1}{2}\pi). \quad n_l=\frac{1}{x}\sin(x-\frac{l+1}{2}\pi) \to 0.}$

广义傅里叶级数 $f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m j_l(k_m r).$ $\quad f_m=\frac{1}{(N_m)^2}\int_0^{r_0} f(r) j_l(k_m r) r^2 dr.$

第十二章 Green函数

一、泊松方程的求解.

$$\begin{cases}\Delta u = f(\vec{r}) \\ \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_\Sigma = \phi(M)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\Delta G(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\ \left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\Big|_\Sigma = 0\end{cases}$$

另一点源场 $\Delta v(\vec{r},\vec{r}_0)=\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$.

→基本积分式: $u(\vec{r}) = \iiint\limits_T v(\vec{r},\vec{r}_0) f(\vec{r}_0)\,dV_0 - \oint\!\!\oint\limits_\Sigma \left[v\frac{\partial u}{\partial n_0} - u\frac{\partial v}{\partial n_0}\right] dS_0$

+边界条件:

(1) 第一类: $u|_\Sigma = \phi(M)$

$$\begin{cases}\Delta G(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \\ G|_\Sigma = 0\end{cases} \Rightarrow G(\vec{r},\vec{r}_0).$$

$$u(\vec{r}) = \iiint\limits_T G(\vec{r},\vec{r}_0) f(\vec{r}_0)\,dV_0 + \oint\!\!\oint\limits_\Sigma \left[\phi(\vec{r}_0)\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_0)}{\partial n_0}\right] dS_0$$

(2) 第二类 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = \phi(M)$

$$\begin{cases}\Delta G(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) - \frac{1}{V} \\ \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0.\end{cases} \Rightarrow G(\vec{r},\vec{r}_0) \quad \text{广义Green函数}$$

$$u(\vec{r}) = \iiint\limits_T G(\vec{r},\vec{r}_0) f(\vec{r}_0)\,dV_0 - \oint\!\!\oint\limits_\Sigma G(\vec{r},\vec{r}_0)\phi(\vec{r}_0)\,dS_0 + \bar{u}$$

(3) 第三类 $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_\Sigma = \phi(M)$

$$\begin{cases}\Delta G(\vec{r},\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0). \\ \left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\Big|_\Sigma = 0\end{cases} \Rightarrow G(\vec{r},\vec{r}_0)$$

$$u(\vec{r}) = \iiint\limits_T G(\vec{r},\vec{r}_0) f(\vec{r}_0)\,dV_0 - \frac{1}{\alpha}\oint\!\!\oint\limits_\Sigma G(\vec{r},\vec{r}_0)\phi(\vec{r}_0)\,dS_0$$

+求解Green函数 —— 电像法.

电像法思想：

电势问题 = 无界空间点电荷 + 边界产生的感应电荷

$$\begin{cases}\nabla^2 G = \delta(\vec r-\vec r_0) \\ \text{边界齐次}\end{cases} \qquad \underset{\uparrow\ \text{易得}}{\nabla^2 G_0 = \delta(\vec r-\vec r_0)} \qquad \begin{cases}\nabla^2 G_1 = 0 \\ \left(\alpha\frac{\partial G_1}{\partial n}+\beta G_1\right)\Big|_\Sigma = -\left(\alpha\frac{\partial G_0}{\partial n}+\beta G_0\right)\Big|_\Sigma\end{cases}$$

感应电荷 等效为 点电荷

假设 $G_1 = -\frac{q}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}$

满足 $G_1+G_0|_{r=a}=0$. 解得 $q, \vec r_1$.

$=\int f\cdot\delta$

$G_{tt}-a^2\Delta G = f$

二、波动、扩散方程 ——含时Green函数

1.波动：
$$\begin{cases}G_{tt}-a^2\Delta G = \delta(\vec r-\vec r_0)\delta(t-t_0) \\ \left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\Big|_\Sigma = 0 \\ G|_{t=0}=0, \quad G_t|_{t=0}=0\end{cases}$$
$\Rightarrow G(\vec r,t;\vec r_0,t_0)$ $(t>t_0)$

延迟Green函数 (初始条件决定).

对称关系：$G(\vec r,t;\vec r_0,t_0) = G(\vec r_0,-t_0;\vec r,-t)$

$$u(\vec r,t) = \iiint_{T_0} dV_0 \int_0^t dt_0\, G(\vec r,t;\vec r_0,t_0) f(\vec r_0,t_0) + a^2\iint_{\Sigma_0} dS_0\int_0^t dt_0\left(G\frac{\partial u}{\partial n_0}-u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right) + \iiint_{T_0} dV_0\,(G\underbrace{u_{t_0}}_{\psi(\vec r_0)}-\underbrace{u}_{\phi(\vec r_0)}G_{t_0})\Big|_{t_0=0}$$

初条

2.输运：
$$\begin{cases}G_t-a^2\Delta G = \delta(\vec r-\vec r_0)\delta(t-t_0) \\ \left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n_0}+\beta G\right)\Big|_\Sigma = 0 \\ G|_{t=0}=0\end{cases}$$

$$u(\vec r,t) = \iiint_{T_0} dV_0\int_0^t dt_0\, G(\vec r,t;\vec r_0,t_0) f(\vec r_0,t_0) + a^2\iint_{\Sigma_0} dS_0\int_0^t dt_0\left(G\frac{\partial u}{\partial n_0}-u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right) + \iiint_{T_0} dV_0\,(uG)|_{t}$$

+ 求解含时Green函数 ——冲量定理法.

补：无界、含时问题 可用Laplace变换(对t)

or Fourier变换(对x)