

理论天体物理

御条当琴

2025 年 4 月 1 日

目录

| | |
|--------------------------|----------|
| I 恒星结构与演化 | 4 |
| 1 恒星模型的构建 | 5 |
| 1.1 球对称体系的质量元描述：质量连续性方程 | 5 |
| 1.2 流体静力学平衡 | 6 |
| 1.3 Virial 定理：判断自引力系统稳定性 | 7 |
| 1.4 混合物质 | 7 |
| 1.5 理想气体 | 8 |
| 1.6 费米气体与玻色气体 | 9 |
| 1.6.1 简并气体 | 10 |
| 1.6.2 光子气体 | 10 |
| 1.7 多方球模型 | 11 |
| 1.7.1 Lane-Emden 方程 | 11 |
| 1.7.2 重要物理量的表示 | 13 |
| 1.7.3 三个解析解 | 13 |
| 1.7.4 数值解 | 14 |
| 1.7.5 讨论 | 18 |
| 1.7.6 多方模型下的恒星自引力势 | 19 |
| 1.8 能量输运 | 20 |
| 1.8.1 能量守恒方程 | 20 |
| 1.8.2 扩散机制 | 20 |
| 1.8.3 Rosseland 平均光深 | 22 |
| 1.8.4 Eddington 光度 | 22 |
| 1.8.5 对流机制 | 23 |
| 1.9 对流如何输运——混合长理论 | 25 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.10 | 能量产生 | 27 |
| 1.11 | 伽莫夫峰 | 28 |
| 1.11.1 | 共振 | 32 |
| 1.11.2 | 电子屏蔽 | 32 |
| 1.12 | 元素组成与能量产生率 | 32 |
| 1.13 | 氢燃烧 | 33 |
| 1.13.1 | pp chain | 33 |
| 1.13.2 | CNO cycle | 34 |
| 1.14 | 氦的燃烧 | 35 |
| 1.15 | 更重元素的燃烧 | 35 |
| 1.15.1 | 碳燃烧 | 35 |
| 1.15.2 | 氮燃烧 | 35 |
| 1.15.3 | 氧燃烧 | 36 |
| 1.16 | 元素合成 | 36 |
| 1.16.1 | 原子核稳定性 | 36 |
| 1.16.2 | s/r-process | 37 |
| 1.17 | 中微子发射 | 37 |
| 1.18 | 恒星结构与演化方程组 | 39 |
| 1.19 | 习题 | 40 |
| 2 | 恒星形成与演化 | 42 |
| 2.1 | 同调关系 Homology Relations | 42 |
| 2.1.1 | 同调关系 | 42 |
| 2.1.2 | 同调收缩 | 43 |
| 2.2 | 分子云坍缩-Jeans 不稳定性 | 44 |
| 2.2.1 | 其他判据 | 45 |
| 2.2.2 | 磁场与湍流的影响 | 46 |
| 2.3 | 等温坍缩与碎裂 | 46 |
| 2.4 | 原恒星 Protostella 与前主序星 Pre-main-sequence star | 47 |
| 2.4.1 | 绝热收缩 | 47 |
| 2.4.2 | 林忠四郎线 | 48 |
| 2.4.3 | 前主序星阶段 | 50 |
| 2.4.4 | 零龄主序 ZAMS | 51 |
| 2.5 | 主序演化 | 51 |

| | | |
|-------|----------------|----|
| 2.5.1 | H 燃烧阶段 | 51 |
| 2.6 | 后主序演化 | 53 |
| 2.6.1 | 镜像原则 | 54 |
| 2.6.2 | 壳层氢燃烧阶段：中等、大质量 | 54 |
| 2.6.3 | 壳层氢燃烧：小质量 | 54 |
| 2.6.4 | 核心氦：小质量 | 55 |
| 2.6.5 | 核心氦：中等质量 | 56 |
| 2.6.6 | 恒星脉动 | 57 |
| 2.7 | 中心氦燃烧结束：中小质量恒星 | 59 |
| 2.7.1 | 热脉冲 | 59 |
| 2.7.2 | 薄层不稳定性 | 59 |
| 2.7.3 | 行星状星云 | 60 |
| 2.8 | 氦燃烧结束：大质量恒星 | 60 |
| 2.8.1 | 碳及更重元素燃烧 | 60 |
| 2.8.2 | 核坍缩超新星 | 61 |
| 2.8.3 | 白矮星吸积伴星物质 | 61 |
| 2.9 | 习题 | 63 |

Part I

恒星结构与演化

Chapter 1

恒星模型的构建

1.1 球对称体系的质量元描述：质量连续性方程

半径 r ，单位时间内 dt 内的质量变化（Euler 描述），半径变化以及单位时间进出的物质引起质量变化

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt$$

于是

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v$$

为建立联系，第一式对 t 偏导，第二式对 r 偏导，取等得到关系

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v)}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho v)$$

这就是流体力学中最基本的质量连续性方程。恒星演化收缩时用 Lagrange 描述更方便，我们希望追踪固定质量对应的变化半径，换 $\rho = \rho(m, t)$, $r = r(m, t)$ 。例如你坐火车返校，你待在哈尔滨，从凌晨待到下午，温度本来就会发生改变，火车瞬移到南京，你顶着温度计作为随体温度也发生变化。这个例子说明在拉格朗日表述下，要考虑自身导致变化以及背景变化导致变化。利用复合函数链式求导法则，有随体导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial m} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m &= \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \end{aligned}$$

且

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

1.2 流体静力学平衡

流体静力学平衡的“支持力”是由流体压强提供的。考虑一个壳层，其引力

$$dF_g = -\rho \frac{Gm}{r^2} dr dA$$

同时

$$dF_p = [P(r) - P(r + dr)]dA \simeq \frac{dP}{dr} dr dA$$

牛顿第二定律

$$\rho dr dA \frac{d^2 r}{dt^2} = dF_g + dF_p$$

整理可得

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \frac{dP}{dr}$$

当流体静力学平衡，加速度为 0，即

$$-\rho \frac{Gm}{r^2} = \frac{dP}{dr}$$

于是有

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

如果压强突然消失，则自由下落

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \frac{dP}{dr} \Rightarrow \frac{R}{\tau_{ff}^2} = \frac{GM}{R^2}$$

自由下落时标

$$\tau_{ff} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \frac{1}{2} (G\bar{\rho})^{-\frac{1}{2}} = 30 \text{min} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2}$$

如果引力突然消失

$$\frac{R}{\tau_{expl}^2} = \frac{P}{\rho R}$$

爆炸时标

$$\tau_{expl} \approx R \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

当代入一颗稳定恒星的参数时，自由下落时标应当等于爆炸时标

1.3 Virial 定理：判断自引力系统稳定性

定义引力能

$$\Omega = - \int_0^R \frac{Gm}{r} 4\pi r^2 \rho dr = -4\pi \int_0^R Gmr\rho dr$$

这里 ρ 为 r 的函数，无法继续求解，利用我们已经得到的流体力学方程，有

$$\Omega = 4\pi \int_0^R \frac{dP}{dr} r^3 dr = 4\pi Pr^3 \Big|_0^R - 3 \int_0^R P 4\pi r^2 dr = -3 \int_0^R \frac{P}{\rho} dm$$

热力学中有理想气体状态方程

$$P = \rho(C_p - C_v)T = \rho(\gamma - 1)C_v T$$

其中

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{k_B}{\mu m_u}, c_v = \frac{3}{2} \frac{k_B}{\mu m_u}, \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

于是

$$\Omega = -3(\gamma - 1)U$$

系统总能量

$$W = \Omega + U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Omega$$

当总能量为正，对小扰动抗性弱，不稳定

1.4 混合物质

混合物质长时间混在一起，我们可以认为达到相同温度，但

$$P = \sum_i P_i = \sum_i n_i k_B T$$

某种元素 j 核电荷数 Z_j ，核子数 A_j ，质量分数 X_j 。元素 j 的原子数密度

$$n_j = \frac{\rho X_j}{A_j m_u}$$

常考虑完全电离情况，此时贡献的总粒子数中还要加入电子，为 $Z_j + 1$ 于是

$$P = \sum_j \rho X_j \frac{Z_j + 1}{A_j m_u} k_B T = \frac{\rho k_B T}{\mu m_u}$$

其中 μ 为平均每个粒子对应的质量数，于是

$$\mu^{-1} = \sum_j X_j \frac{Z_j + 1}{A_j} \Rightarrow \mu^{-1} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

这里 X, Y, Z 分别相应氢、氦及金属元素。上面的电子是不贡献质量的。而如果我们指定要求平均每个电子对应的质量数 μ_e ，只需要去除质子，体现在 $+1$ 中，同理有

$$\mu_e^{-1} \simeq \frac{1}{1}X + \frac{2}{4}Y + \frac{1}{2}Z = X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(1 - X - Y) = \frac{1 + X}{2}$$

故

$$\mu_e \simeq \frac{2}{1 + X}$$

1.5 理想气体

由热力学中相关知识，数密度

$$n = \int_0^\infty n(p) dp$$

内能密度

$$U = \int_0^\infty \epsilon_p n(p) = n \langle \epsilon_p \rangle$$

压强则考虑粒子于壁的反射

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{L}{v \cos \theta} \\ \Delta p &= 2mv \cos \theta \\ F_s &= \frac{2mv^2 \cos^2 \theta}{L} \end{aligned}$$

受力

$$F_{tot} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_s \frac{N}{4\pi} \sin \theta d\theta = \frac{Nmv^2}{3L}$$

于是压强

$$P = \frac{F_{tot}}{A}$$

这里的推导假设速度是一样的，其实还可以服从一定的分布

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n(p) dp = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle$$

而对于相对论性能量

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

粒子动能

$$\epsilon_p = \epsilon - mc^2$$

速度

$$v_p = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{pc^2}{\epsilon}$$

现在我们来考察压强与内能密度的关系非相对论性极限

$$P = \frac{1}{3}nm\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{2}nm\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3}u$$

这里没有代入任何的速度分布，而对于极端相对论极限 $v \sim c$ ，代入 $\epsilon_p = pc$ ，有

$$P = \frac{1}{3}u$$

若选取麦克斯韦分布，即可推出理想气体状态方程

$$P = nkT$$

定义单位质量内能密度 $U = u/\rho$, $\frac{1}{\rho} = V$ ，于是

$$U = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{\mu m_u}, PV = \frac{k_B}{\mu m_u} T$$

在绝热过程中， $dQ = 0$ ，热力学第一定律改写为

$$c_V dT = -PdV$$

两面同时除以 PV

$$c_V \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right) = -\frac{k_B}{\mu m_u} \frac{dV}{V} = (c_V - c_p) \frac{dV}{V}$$

也即

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

于是有

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_s = \gamma - 1$$

1.6 费米气体与玻色气体

由量子力学测不准原理

$$\Delta x \Delta p \geq h \Rightarrow \Delta V \Delta^3 p \geq h^3$$

对应在相空间动量空间中的最小单元，于是态密度

$$g(p)dp = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

对于费米气体和玻色气体，分布分别为

$$f_{FD}(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1}$$

$$f_{BE}(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1}$$

其中 μ 为化学势，代表往体系增加粒子所要付出的代价。对于费米气体，零温时是我们熟悉的情况，分布变为阶跃函数，可计算得到费米动量

$$p_F = h \left(\frac{3}{8\pi} n_e \right)^{1/3}$$

而对于光子，粒子数不守恒， μ 取 0，形式上与黑体谱十分类似。综合考虑，实际的分布为 $g(p) \cdot f(p)$ 。

1.6.1 简并气体

对于完全简并非相对论极限下

$$P_e = \frac{2}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{p^2}{2m_e} dp = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n_e^{5/3}, P = \frac{2}{5} n E_F$$

相对论下

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi c p^3}{h^3} dp = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}, P = \frac{1}{4} n E_F$$

1.6.2 光子气体

$$n(p)dp = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{\epsilon_p/kT} - 1} 4\pi p^2 dp$$

$$n_{ph} = \int_0^\infty n(p) dp = bT^3$$

$$U_{rad} = \int_0^\infty pc n(p) dp = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = aT^4$$

其中

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x} dx}{-e^{-x} + 1} = \int_0^\infty x^3 \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}$$

这里最后的级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 可考虑用留数求解, 考虑

$$f(z) = \frac{1}{z^4}$$

则有

$$2S = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = -\{\pi f(z) \cot \pi z \text{ 在 } f(z) \text{ 各极点留数之和}\} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\pi z / \tan \pi z)^{(4)}}{4!} = \frac{\pi^4}{45}$$

即

$$S = \frac{\pi^4}{90}$$

于是

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$$

则辐射压强

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

其实这就是我们熟知的黑体辐射, 另外的, 对于能谱形状符合黑体, 但能量密度低于 aT^4 的辐射, 称为灰体辐射。CMB 膨胀, 但我们处于内部观察仍是黑体, 绝热膨胀, 只是温度不断降低。但从外部看太阳膨胀, 绝热膨胀, 是灰体辐射。

1.7 多方球模型

1.7.1 Lane-Emden 方程

有了之前的准备, 我们可以着手恒星模型的构建。所谓的恒星结构, 转化为实际问题即给定质量 m , 导出包含此质量的恒星半径为多少, 以及该处压强为多少?

暂时不考虑温度梯度与光度梯度等, 我们已经知道的基本的、不依赖于时间的恒星结构公式有

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

于是

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

两个方程有三个未知数, 如果利用状态方程又引入了新的参数温度 T , 且考虑进温度梯度、能量梯度等一系列基本方程以及相应本构关系, 必须使用数值解来“构建”恒星模型, 在不参考

其他方程情况下，以上两个方程可同时求解，正常情况下，温度和成分通常以复杂的方式进入压强状态公式，但在某些情况下，例如对于绝热气体压强可以明确地、独立地用密度表示。经过经验总结，人们构建了假想的多方球模型，约束

$$P = K\rho^\gamma$$

流体静力学平衡方程改写

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{dm}{dr} = -4\pi G r^2 \rho$$

为简化计算，记 $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ ， $\rho = \rho_c \theta^n$ ， n 称为多方指数，代入简化为

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n$$

继续引入无量纲系数

$$r = \alpha\xi \quad \alpha^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}$$

得到著名的 Lane-Emden 方程

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

给出无量纲数 $\theta = \theta_n(\xi)$ (称为 Lane-Emden 函数)，直接给出密度随半径的关系 $\rho_n(r)$ ，由多方状态公式提供了压强轮廓。此外假设理想气体定律和辐射压强相应的物质成分恒定，则温度轮廓 $T(r)$ 也可以得到

为了实际求解该二阶微分方程，必须采用两个边界条件以指定两个待定积分常数，假设恒星外边界为压强变为 0 的位置，同时相应气体密度也为 0，那么表面处 $\xi = \xi_1$ 方便的有

$$\theta_n(\xi) = 0$$

接下来考虑中心处，对于 $\delta \rightarrow 0$ ，即无限趋于中心的情况，半径 δ 区域内包含质量

$$m(\delta) = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} \delta^3 \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}^2 \delta \rightarrow 0$$

而多方状态关系 $P = K\rho^{1+1/n}$ ，故近中心处有

$$\frac{d\rho}{dr} \rightarrow 0$$

这意味着中心边界条件

$$\frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$$

另外，我们约定 $\theta(0) = 1$ ，这是对无量纲系数 θ 的归一化，这样 ρ_c 就恰好表示了恒星中心密度

1.7.2 重要物理量的表示

参数 ξ 对应半径内包含质量

$$m(\xi) = \int_0^{\alpha\xi} 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \theta_n^n d\xi = -4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta_n}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi\alpha^3 \rho_c \xi^2 \frac{d\theta_n}{d\xi}$$

其中第三个等号利用了 Lane-Emden 方程。同时恒星半径

$$R = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} \xi_1 = \alpha\xi_1$$

于是

$$\rho_c = - \left[\frac{\xi}{3} \frac{1}{\frac{d\theta_n}{d\xi}} \right]_{\xi=\xi_1} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

压强

1.7.3 三个解析解

经过检验, Lane-Emden 方程只有三个解析解, 分别为 $n = 0, 1, 5$ 的情况。当 $n = 0$,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1, \theta(0) = 1 \Rightarrow \theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}, \xi = \sqrt{6}$$

当 $n = 1$,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \theta = 0$$

令 $u = \xi\theta$, 方程化简为简谐方程

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + u = 0 \Rightarrow u(\xi) = A \sin \xi + B \cos \xi \Rightarrow \theta(\xi) = \frac{A \sin \xi + B \cos \xi}{\xi}$$

中心处 $\xi \rightarrow 0$, 为避免发散 $B = 0, \theta(0) = 1$ 得到 $A = 1$, 此时导数

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\cos \xi \cdot \xi - \sin \xi}{\xi^2} \rightarrow 0$$

合乎要求, 且 $\xi_1 = \pi$.

最后, 当 $n = 5$ 时,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^5 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^5$$

由边界条件, 可设偶函数幂级数解

$$\theta(\xi) = 1 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + a_6\xi^6 + \dots$$

计算各阶导数并代入方程, 左侧右侧分别展开至四阶并比较系数

$$\begin{aligned} &6a_2 + 20a_4\xi^2 + 42a_6\xi^4 + \dots \\ &-1 - 5a_2\xi^2 - (5a_4 + 10a_2^2)\xi^4 + \dots \end{aligned}$$

于是

$$a_2 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{24}, \quad a_6 = -\frac{5}{432}, \quad \dots$$

相邻系数比例关系似乎有着某种关系, 交替且带有阶乘痕迹, 可考虑试探解 $\theta(\xi) = (1 + B\xi^2)^p$ 解得

$$\theta(\xi) = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2}$$

符合所有边界条件, 且此时 $\xi_1 \rightarrow \infty$, 作为数学模型是解析的, 但此时已不具有物理意义.

1.7.4 数值解

见<https://zhuanlan.zhihu.com/p/2584388594>

采用 Monte Carlo 方法解 Lane-Emden 方程 (<https://arxiv.org/pdf/2211.08356>)

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\frac{2}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + f(\theta, \xi), \quad f(\theta, \xi) = -\theta^n$$

遵循如下程序

1. 降阶

$$\begin{aligned} \theta &= y_1(\xi) \\ \frac{dy_1}{d\xi} &= y_2(\xi) \end{aligned}$$

得到

$$\frac{dy_2}{d\xi} = -\frac{2}{\xi}y_2(\xi) + f(y_1, \xi) = g(y_2, y_1, \xi)$$

2. 分割 $[0, \xi_f]$ 为小的 $\Delta\xi = 10^{-3}$ 块, ξ_f 是 y_1 的第一个零点
3. 从 ξ_i 到 ξ_{i+1} 的均匀分布产生随机样本, 样本量 $M = 1e^6$
4. 初始值 $\xi \rightarrow 0, y_1 \rightarrow 1, y_2 \rightarrow 0$
- 5.

$$y_2(\xi_{i+1}) = y_2(\xi_i) + \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{M} \sum_{k=1}^M g(y_2(\xi_i), y_1(\xi_i), \xi_k)$$

6.

$$y_1(\xi_{i+1}) = y_1(\xi_i) + \Delta\xi y_2(\xi_{i+1})$$

7.

$$\xi_{i+1} - \xi_i = \Delta\xi$$

8. 重复步骤 3-7, 直到 $\xi_{i+1} = \xi_f$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Lane-Emden 方程的参数
n = 3 # 设置 n 自己改
delta_xi = 1e-4 # 步长
M = int(1e4) # 随机样本量 #1e6 把电脑搞爆了 换 1e3 吧

# 初始化
xi = 0 # 从 xi=0 开始
y1 = 1 # y1(0) = (0) = 1
y2 = 0 # y2(0) = '(0) = 0

# 设置停止条件和阈值
threshold = 1e-18
xi_values = []
y1_values = []
y2_values = []

def g(y2, y1, xi):
    """ 计算  $g(y_2, y_1, xi) = -((2/xi) * y_2) - y_1^n$  """
    if (xi.any() == 0):
        return -1 # 避免除以零
    return -2 / xi * y2 - y1**n

#print(1)# 检查点
k=1
# 计算解
```

```
while y1 > threshold: # 循环直到 y1 小于给定的阈值
    xi_values.append(xi)
    y1_values.append(y1)
    y2_values.append(y2)

    # 均匀分布随机样本
    xi_samples = np.random.uniform(xi, xi + delta_xi, M)

    # 计算 g 的平均值
    avg_g = np.mean(g(y2, y1, xi_samples))

    # 更新 y2 和 y1
    y2 = y2 + (delta_xi ) * avg_g
    y1 = y1 + delta_xi * y2

    # 更新 xi
    xi += delta_xi
    k=k+1
    #print(k) 反转了 我不输出这个就不会爆
    if(k==1e6):
        break

# 输出结果
ratio=-xi_f/(3*y2)
print("n=",n," 时")
print(f"xi_f: {xi_f:.6f}",f"rho_c/mean_rho:{ratio:.6f}")

# 绘图
plt.plot(xi_values, y1_values, label='y1 ( )')
plt.xlabel(' ')
plt.ylabel('y1 ( )')
plt.title(f'Lane-Emden Equation Solution (n={n})')
plt.axhline(0, color='black', lw=0.5, ls='--')
plt.axvline(0, color='black', lw=0.5, ls='--')
```

```
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

上面代码里有空的都是希腊字母字符在 minted 环境里吞掉了。精度还挺不错的，就是有点慢，输出结果

```
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 0 时 rho_c/mean_rho:0.999980
xi_f: 2.449400
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 0.5 时
xi_f: 2.752700 rho_c/mean_rho:1.835227
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 1 时
xi_f: 3.141600 rho_c/mean_rho:3.290043
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 1.5 时
xi_f: 3.653800 rho_c/mean_rho:5.991219
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 2 时
xi_f: 4.352900 rho_c/mean_rho:11.403302
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 2.5 时
xi_f: 5.355400 rho_c/mean_rho:23.409251
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 3 时
xi_f: 6.897200 rho_c/mean_rho:54.193386
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 3.5 时
xi_f: 9.536600 rho_c/mean_rho:152.928891
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
n= 4 时
xi_f: 14.973800 rho_c/mean_rho:622.714319
===== RESTART: C:\Users\86134\Documents\PYworkplace\lane-emden.py =====
```

$n = 4.5$ 时

ξ_f : 31.846600 ρ_c/mean_ρ :6195.578486

1.7.5 讨论

$n = 0, \gamma = \infty$

此时 $\rho = \rho_c$, 为均匀密度球

$n = \infty, \gamma = 1$

此时 $P = K\rho \propto \rho$, 为等温球

$n = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{5}{3}$

简并气体, 绝热, 非相对论极限

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=R} = -A \frac{2m_p GM}{R^2} = -\frac{Mm_p^2}{R^2} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \left(\frac{2m_p m_e G}{\hbar^2} \right)^3$$

$$\xrightarrow[\xi=r/R]{g=fR^4} \left. \frac{dg}{d\xi} \right|_{\xi=1} = -Mm_p^2 R^3 \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \left(\frac{2m_p m_e G}{\hbar^2} \right)^3, \quad \frac{d^2(g\xi)}{d\xi^2} + \xi g^{\frac{3}{2}} = 0$$

若边界处 g 的行为已知且导函数为常数, 可得到著名的白矮星质量-半径关系

$$R \propto M^{-\frac{1}{3}}$$

查表得到 $-(r^5 \frac{df}{dr})_{r=r_f} = 132.38 MR^3 = 2.684 \times 10^{51} kg$

$n = 3, \gamma = \frac{4}{3}$

光压占主导, 绝热, 相对论极限

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{df}{dr}) + f^3 = 0, \quad f = \sqrt{\frac{16Gm_p^2}{3\pi(\hbar c)^3} \mu_e}$$

且

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=R} = -2m_p^2 M \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{R^2}$$

$$\xrightarrow[\xi=r/R]{h=Rf} \left. \frac{dh}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_f} = -2m_p^2 M \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \frac{dh}{d\xi}) + h^3 = 0$$

若边界处 h 的行为已知且导函数为常数，有意思的是这里的边界条件在无量纲化后与 R 无关了！不过我们解还是用有量纲的 r 的方程，剩下的同样交给计算机数值解，与上同理，得到 $-\left(r^2 \frac{df}{dr}\right)_{r=r_f} = 2.018$ ，于是可以得到 $M = 2.85 \times 10^{30} \text{kg} = 1.44 M_\odot$ ，这正是 Chandrasekhar 极限！

一般地，

$$M_{ch} = 5.836 \mu_e^{-2} M_\odot$$

氦核与金属白矮星 $\mu_e = 2$

1.7.6 多方模型下的恒星自引力势

Kippenhahn 教科书 19.9

自引力势 Ω ，在分壳层逐个向外计算对除壳层外部分引力势时，每一部分被计算两次，于是

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \phi(m) dm$$

且

$$\nabla \phi = -\frac{GM}{r^2}$$

由流体静力学条件

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

故

$$\frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{K}{\rho} \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr} = -(n+1)K \frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr}$$

从某个半径 r 到恒星表面积分，于是

$$\phi(R) - \phi(r) = (n+1)K \rho^{\frac{1}{n}}(r) = (n+1) \frac{P}{\rho}$$

对质量从 0 到 M 积分，恒星表面引力势已经为常数 $-\frac{GM}{R}$ ，故

$$-\frac{GM^2}{R} - 2\Omega = -\frac{1}{3}(n+1)\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{3GM^2}{(5-n)R}$$

$$W = \Omega + U = \Omega - \frac{1}{3(\gamma-1)}\Omega = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Omega$$

当 $\gamma < \frac{4}{3}$ ，则动力学不稳定

1.8 能量输运

1.8.1 能量守恒方程

还有一种机制使得热被保持从而保持压强梯度，从而保持静止

考虑一个壳层 Δm ，单位时间通过球面能量为 $l(m)$ ，则外 shell 相应 $l(m + \Delta m)$ ，壳层热量释放，考虑单位质量物质核能产生以及单位质量物质中微子能损，以 ϵ 作为比率，故

$$\Delta q = (lm)\Delta t - l(m + \Delta m)\Delta t + \epsilon_{nuc}\Delta m\Delta t - \epsilon_\nu\Delta m\Delta t$$

则单位质量产能

$$\delta Q = \left(\epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu - \frac{\partial l}{\partial m} \right) \delta t$$

由热力学第一定律

$$dQ = du + Pdv = du - \frac{P}{\rho^2}d\rho$$

于是

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} := \epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu + \epsilon_{gr}$$

$\epsilon_{gr} > 0$ ，壳层释放能量； $\epsilon_{gr} < 0$ ，壳层吸收能量。对质量积分

$$\int_0^M \epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu dm = L_{nuc} - L_\nu$$

这个光度与我们常说太阳光度有所不同，尽管都是单位时间通过面的辐射强度，但不一定是以光速直线传播，也可能含有对流/扩散等等

1.8.2 扩散机制

扩散是光子或气体粒子（电子/离子）的随机行走，引入平均自由程（平均走多久发生散射） λ ，碰撞截面 σ ，碰撞前数密度 n ，则 $\lambda\sigma n$ 表示走过体积 $\lambda\sigma$ 会发生一次散射，则

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

若以电子为主要散射体，换用质量密度

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\sigma}{\mu_e m_u} \rho} := \frac{1}{\kappa \rho}$$

其中 κ 称为不透明度随机游走 N 步后位移大小

$$L = \sqrt{(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_N)^2} = \sqrt{\sum_i l_i^2 + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \cos \theta_{ij}} = \sqrt{N\lambda^2 + 2\lambda^2 \sum_{i < j} \cos \theta_{ij}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}\lambda$$

这个结论有广泛的应用，特别是在统计意义上

而对流是气体粒子的整体运动，通常具有宏观的速度梯度，就算是杂乱无章的湍流也是粒子的一中集体行为

现在考虑单位时间通过单位面积的粒子数，即流量 J . 单位立体角中，在一步平均自由程内，能与 z 轴夹 θ 角通过垂直 z 轴的面 dA 的粒子是属于体积 $\lambda \cos \theta dA$ 集合中点，粒子数 $n(z - \lambda \cos \theta) \lambda \cos \theta dA$ 单位面积单位时间，则除去 $dA \frac{\lambda}{v}$ ，再对所有方向积分，于是

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n(z - \lambda \cos \theta) v \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

对 n 泰勒展开近似到一阶

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [n(z) - \frac{\partial n}{\partial z} \lambda \cos \theta] v \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{1}{4\pi} \lambda \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v \frac{\partial n}{\partial z} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{1}{3} \bar{v} \lambda \frac{\partial n}{\partial z}$$

定义扩散系数 $D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$ ，则将每个粒子净能量叠加，可推知

$$F = -D \nabla U = -D C_V \nabla T = -K \nabla T$$

K 称为传导系数

套用到光子上， $\bar{v} = c$ 则由于光子自身扩散带来流量，即辐射

$$K_{rad} = \frac{4}{3} \frac{acT^3}{\kappa\rho}$$

又

$$F = \frac{l}{4\pi r^2}$$

得到

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho l}{16\pi ac r^2 T^3} \Rightarrow \frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa l}{r^4 T^3}$$

又

$$\frac{dT}{dm} = \frac{dP}{dm} \cdot \frac{dT}{dP} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \cdot \frac{d \log T}{d \log P}$$

我们可以定义量

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_{rad} = \frac{3}{16\pi ac G} \frac{\kappa l P}{m T^4}$$

未来在对流的讨论中我们会频繁使用这个物理量，它表示在辐射平衡条件下，温度随压强变化的对数梯度。具体来说，描述了当能量完全通过辐射扩散（而非对流）传输时，恒星或流体层中的温度随深度（压强增加方向）的变化率。

除了辐射机制外，还有一种热传导机制，不是光子扩散而是恒星原物质扩散，如电子

$$F = F_{rad} + F_{cd} = -(K_{rad} + K_{cd}) \nabla T$$

在极端相对论情况下, 有

$$\frac{1}{\kappa} \sim \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cd}}$$

通常物质扩散可被忽略, 但对于部分简并星, 热传导可能比辐射更重要, 因为由泡利不相容原理, 简并程度太高能级往上堆积达到相对论程度, 且众多状态数被占据, 要找到容纳它的状态迫使其有更长的平均自由程

1.8.3 Rosseland 平均光深

光子能量其实并非都相等 (频率非单色), 要刻画总的能流, 我们现在需要描述随光子频率的依赖关系

$$\mathbf{F}_v = -D_v \nabla U_v = -D_v \frac{\partial U_v}{\partial T} \nabla T, \quad D_v = \frac{1}{3} c \ell_v = \frac{c}{3\kappa_v \rho}$$

对所有频率积分

$$\mathbf{F} = - \left[\frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_v} \frac{\partial U_v}{\partial T} dv \right] \nabla T := -K_{rad} \nabla T, \quad U_v = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{e^{hv/kT} - 1}$$

1.8.4 Eddington 光度

考虑光子压的压强梯度

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{4\pi c} \frac{l}{r^2}$$

需要小于流体静力学平衡梯度

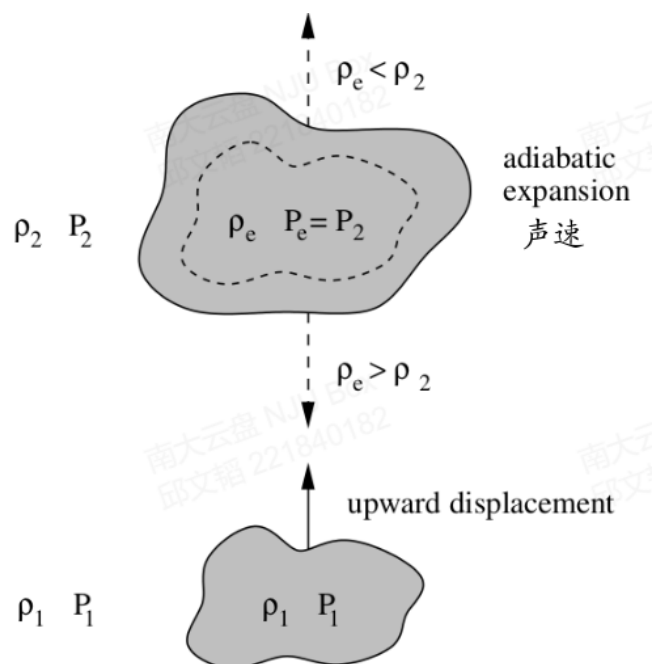
$$\left| \frac{dP_{rad}}{dr} \right| < \left| \left(\frac{dP}{dr} \right)_{HE} \right| \Rightarrow \frac{\kappa \rho}{4\pi c} \frac{l}{r^2} < \frac{Gm\rho}{r^2}$$

即

$$l < \frac{4\pi c G m}{\kappa} = l_{Edd}$$

这是通过辐射可以输运的最大光度, 否则光子压将使得恒星“吹飞”不稳定。比如大质量恒星的表面形成的星风驱动物质流失, 但内部整体上还是流体静力学平衡的。

1.8.5 对流机制



为了运输更大的光度，我们需要另外的方式来运输能量。恒星内部，考虑一个质量微元，赋予微扰 $r \rightarrow r + \Delta r$ ，外界压强与密度 $(P_1, \rho_1) \rightarrow (P_2, \rho_2)$ ，绝热缓变上升过程中，压强始终保持平衡，但密度却不会随变，接下来微元将往回落还是继续上升，取决于其所受的浮力。若 $\rho_e < \rho_2$ ，更轻则会继续上升，发生对流，反之则扰动被回复，不发生对流。绝热条件下 $P = C\rho^\gamma$

$$\delta P = C\gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} \delta \rho \Rightarrow \frac{\delta P}{P} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho}$$

且

$$\delta P_e = P_2 - P_1 = \frac{dP}{dr} \Delta r$$

稳定条件为 $\rho_e > \rho_2$ ，得到

$$\frac{d \log \rho}{d \log P} > \frac{1}{\gamma_{\text{ad}}}$$

利用这一关系我们可以直观地画图分析

设 $P = P_0 \rho^X T^Y \mu^Z$ ，取对数求导

$$\frac{dP}{P} = X \frac{d\rho}{\rho} + Y \frac{dT}{T} + Z \frac{d\mu}{\mu}$$

则

$$X = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_{\rho, X_i} \quad Y = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{T, X_i} \quad Z = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \mu} \right)_{\rho, T}$$

于是

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln p} = \frac{1}{X} \left(1 - Y \frac{d \ln T}{d \ln P} - Z \frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right) := \frac{1}{X} (1 - Y \nabla - Z \nabla_{\mu})$$

于是稳定性条件改写为

$$\frac{1}{X} (1 - Y \nabla - Z \nabla_{\mu}) > \frac{1}{X} (1 - Y \nabla_{ad}) \Rightarrow \nabla < \nabla_{ad} - \frac{Y}{Z} \nabla_{\mu}$$

得到 Ledoux 判据

$$\nabla < \nabla_{ad} - \frac{Y}{Z} \nabla_{\mu}$$

若在环境化学成分无变化的简化情况下, 则为 Schwarzschild 判据

$$\nabla < \nabla_{ad}$$

当辐射占主导时 $\nabla = \nabla_{rad}$ 。要发生对流, 则关系取反, 由 Schwarzschild 判据

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{P}{T^4} \frac{\kappa l}{m} > \nabla_{ad}$$

容易发生对流处有

1. 较大的不透明度 κ (较小质量恒星的外层)
2. 较大的 l/m (较大质量恒星的核心)
3. 较大的 $P/T^4 \sim \rho/T^3$ (较冷/小质量恒星的外层)
4. 较小的 ∇_{ad} (部分电离区域-较冷/小质量恒星的外层, 大质量恒星的表层也会存在部分电离区域)

据此, 接下来我们讨论恒星哪些部分会发生对流

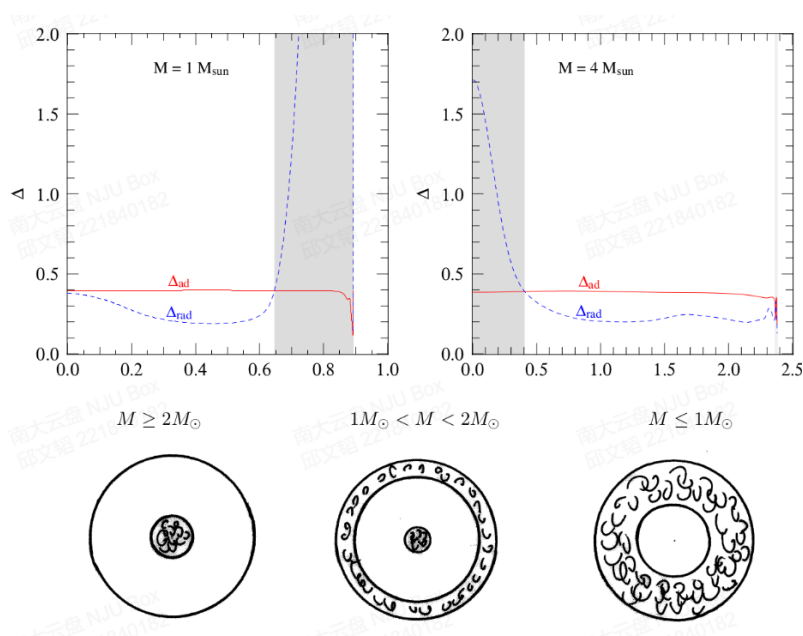


图 1.1: 大质量恒星中心对流区外层辐射区, 小质量整体对流, 中等质量恒星中心辐射区外层对流区

1.9 对流如何输运——混合长理论

如果温度梯度变得太陡, 则对流可以开始在能量传输中起到重要作用。从物理上讲, 对流涉及物质运动: 热的物质块向上移动, 而较冷的、密度较大的物质块下沉。不幸的是, 在宏观上看, 对流是一种比辐射复杂得多的现象。事实上, 在恒星环境中, 还没有真正令人满意的方法来充分描述它。流体力学是描述气体和液体运动的物理学领域, 它依赖于一组复杂的三维公式, 即 Navier-Stokes 方程。然而, 在很大程度上由于当前计算能力的限制, 大多数恒星结构的计算代码是一维的 (仅依赖于 r)。因此, 有必要用一维现象学理论来近似一个明确的三维过程。当恒星中存在对流时, 情况变得更加复杂, 它通常是相当湍急的, 需要详细理解所涉及的黏性 (流体摩擦) 和热耗散。此外, 对流的特征长度尺度, 通常以压强标高来表示, 它常常与恒星的大小相当。最后, 对流的时标取为对流体元行进一个特征距离所需的时间量, 它在某些情况下近似等于恒星结构变化的时标, 这意味着对流与恒星的动力学行为有很强的耦合。这些错综复杂的情况对恒星行为的影响还没有从根本上知晓。幸运的是, 我们可以采取一个较为粗糙的近似去理解其中的物理过程。基本理解是质量微元走 l_m 后溶解在周围环境中, 称为混

合长，认为混合长与压力标高量级是相当的，压力标高定义为

$$H_P = \left| \frac{dr}{d \ln P} \right| = \frac{P}{\rho g}, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

其可以估计恒星中对流区域的大小

与周围溶解相当于将能量贡献给周围温度梯度

$$\frac{dT}{dr} = T \frac{d \ln T}{dr} = T \frac{\ln T}{d \ln P} \frac{d \ln P}{dr} = -\frac{T}{H_P} \nabla$$

发生溶解时，将发生能量混合（此前为绝热过程），起始温度差异（注意这里的 Δ 表示差值而不是微分！这里第二步相当于在上升前点泰勒展开，此时初始温度相等，保留一阶项）

$$\Delta T = T_e - T_s = \Delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \ell_m = T \frac{\ell_m}{H_P} (\nabla - \nabla_{\text{ad}})$$

单位时间通过单位面积的能量

$$F_{\text{conv}} = v_c \Delta t \Delta A \rho \Delta U \frac{1}{\Delta A \Delta t} = v_c \rho c_P \Delta T$$

平均速度可以从作用在微团上每单位体积净力求出，假设理想气体并假设 μ 常数

$$\delta P = \frac{P}{\rho} \delta \rho + \frac{P}{T} \delta T$$

而微团始终与环境压强相等，于是

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{T} \delta T$$

则净力（浮力减去引力）

$$f_{\text{net}} = -\delta \rho \cdot g = \frac{\rho g}{T} \delta T$$

取平均，浮力在距离 ℓ 每单位体积做功转化为气泡动能，最终

$$v_c \approx \sqrt{\frac{1}{2} \ell_m g \frac{\Delta T}{T}} \approx \sqrt{\frac{\ell_m^2 g}{2 H_P}} (\nabla - \nabla_{\text{ad}})$$

对流过程不仅输运能量，也带来了物质的混合。

关于能量的输运一言以蔽之，在恒星内部有三种不同的能量传输机制。辐射允许由核反应和引力产生的能量经由光子被携带到表面，光子在遇到物质时被吸收并以近乎随机的方向重新发射。正如人们所预料的那样，这表明物质的不透明度必定起着重要作用。在恒星的许多区域，对流可以是一种非常有效的传输机制，热的、上浮的质量体元携带额外的能量向外移动，而冷的体元则向内下沉。最后，传导则通过粒子之间的碰撞传输热量。虽然在某些恒星环境中传导可以起到重要作用，但是在大多数恒星一生中的绝大多数阶段，它通常是不重要的。

现在我们估算对流输运能量所需要的温度梯度, 换密度为平均密度 $3M/4\pi R^3$, $c_p T \approx 5GM/2R, \sqrt{gH_p} = \sqrt{P/\rho} \sim \sqrt{GM/R}$, 于是

$$F_{conv} \sim \frac{M}{R^3} \left(\frac{GM}{R} \right)^{\frac{3}{2}} (\nabla - \nabla_{ad})^{\frac{3}{2}} \sim \frac{L}{R^3}$$

其中用到

$$\nabla - \nabla_{ad} \sim \left(\frac{LR}{M} \right) \frac{R}{GM} \sim 10^{-8}$$

则温度梯度

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla, \nabla \sim \nabla_{ad}$$

理想气体下, $\nabla = 0.4$. 现在我们来看速度

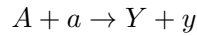
$$v_c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} (\nabla - \nabla_{ad})^{\frac{1}{2}}$$

为亚声速 (声速是一种调节机制), 对流速度较慢, 因此整体上压强能与外界保持平衡. 取物质混合的时标 τ_{mix} , 其远小于热学时标 τ_{KH} 和核燃烧的时标 τ_{nuc} , 因此是一个短时标的物质交换, 不会破坏恒星整体结构, 流体静力学近似成立. 考虑对流后, 对流主导区域化学成分较为均匀, 为恒星不断补充核燃烧的燃料, 延长主序

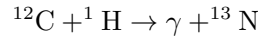
对流过冲 (overshooting), 由于非局部对流效应, 太阳和恒星的对流层中的对流运动从局部对流不稳定区穿过对流不稳定边界, 贯穿进入局部对流稳定区的现象, 对恒星内部物质混合交换起到重要作用. 半对流 (semi-convection) 满足史瓦西判据但不满足勒都判据.

1.10 能量产生

核物理中, 我们约定反应



记为 $A(a, y)Y$, 反应过程要求电荷数守恒, 质量数守恒, 例如



记为 $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$. 注意, 质量数守恒并不意味着质量守恒, 事实上, 核反应能量就来源于质量亏损

$$Q = c^2 [\Delta m(A) + \Delta m(a) - \Delta m(Y) - \Delta m(y)]$$

常用常数 $m_u c^2 = 931.494 \text{MeV}$. 核结合能定义为

$$E_{B,i} = [(A_i - Z_i) m_n + Z_i m_p - m_i] c^2$$

较为稳定的核素中, 铁的平均结合能最大, 这也是为什么恒星一般达到铁核便停止核反应. (实际上镍的平均结合能就比 ^{56}Fe 大). 要研究核反应, 就牵扯到反应截面与反应速率, 反应截面定义为

$$\sigma = \frac{\text{单位时间靶粒子反应数}}{\text{单位时间单位面积入射粒子数}}$$

从经典的入射过程去理解这个定义, 入射粒子均匀入射面积 A , $\frac{\sigma}{A} = \frac{\text{反应粒子数}}{\text{入射粒子数}}$, 等号右边同除时间 Δ , 再将 A 移到等号右边分母处, 恰好是我们上面的定义. 设单个入射粒子以速度 v 入射到数密度 n 的靶粒子中, 扫过靶粒子数 N 有 $N = v\Delta t\sigma n$, 单位时间反应数 $q = \sigma nv$. 现在扩展到多个粒子, 单位体积内有 n_i 个 i 粒子, n_j 个 j 粒子, 若为同种粒子还会重复计算. 于是核反应速率

$$r_{ij} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} n_i n_j \langle \sigma v \rangle$$

不考虑相对论效应, 在能量空间中求平均

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma v n(\vec{v}) d\vec{v} = \int \sigma v \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv = \int \sigma(E) \left(\frac{2E}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} 4\pi \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{dE}{2\sqrt{E}}$$

即

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \sigma(E) E e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

若考虑物质波, 位置动量有一定不确定性

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

低速情况下是要大于经典半径的, 发生关联的反应有效截面可用 $\pi\lambda^2$ 来量度.

1.11 伽莫夫峰

如果我们假设克服库仑势垒所需的能量由气体的热能提供, 并且所有的粒子核都是非常随机地运动的, 那么可以估计出克服势垒所需的经典温度 T . 由于气体中的所有粒子都是随机运动的, 参考两个原子核之间的相对速度 v 和它们的折合质量 (μ_m) 是适当的 (注意, 这里我们不是指平均分子量 μ). 让我们折合质量的初始动能与势垒的势能相等, 将给出经典的拐点. 现在,

$$\frac{1}{2\mu_m} v^2 = \frac{3}{2} kT_{\text{classical}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r},$$

其中, $T_{classical}$ 表示典型的粒子克服势垒所需的温度; Z_1 和 Z_2 是每个粒子核中的质子数; r 是它们的分离距离。假设典型的原子核的半径在 1×10^{-15} m 这个量级上, 克服库仑势垒所需的温度近似为

$$T_{classical} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{6\pi\epsilon_0 k r} \sim 10^{10} K,$$

对应于两个质子之间的碰撞 ($Z_1 = Z_2 = 1$)。然而, 太阳的中心温度仅为 $1.57 \times 10^7 K$, 远低于这里所需的温度。即使考虑到 Maxwell-Boltzmann 分布表明气体中有大量粒子的速度超过平均速度这个事实, 经典物理学依然无法解释大量的粒子是如何能够克服库仑势垒从而产生太阳观测到的光度的。

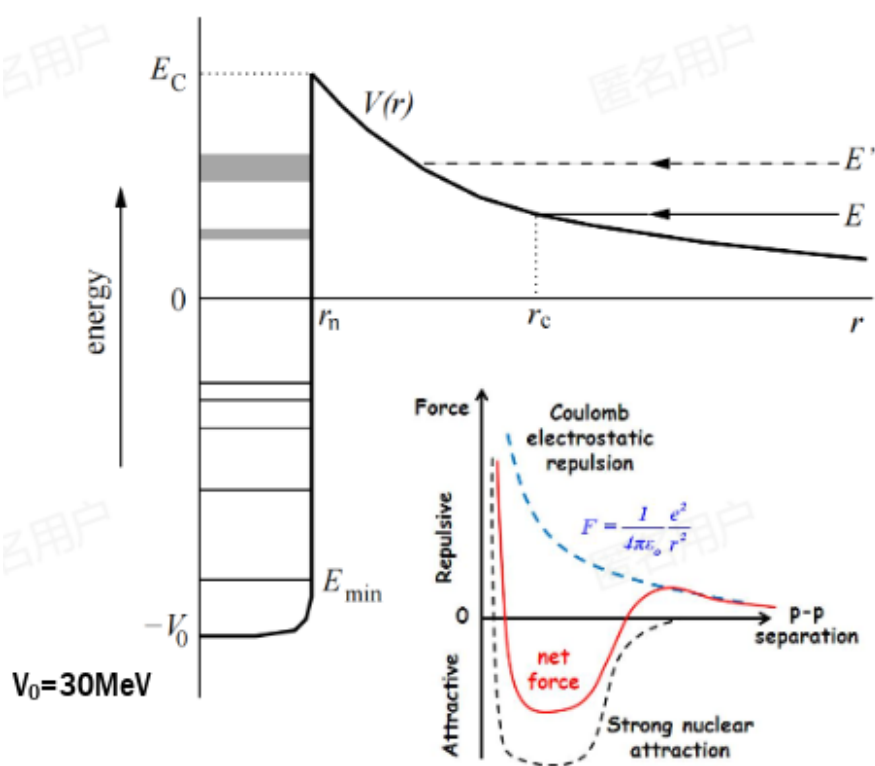


图 1.2: 势垒

说明用经典散射来刻画是不符合实际物理的. 用量子力学中效应来考虑, 一个粒子与另一个粒子碰撞时, 其位置的不确定性可能很大, 以至于碰撞的动能不足以克服经典库仑势阱, 但尽管如此, 其中一个粒子仍可能存在于另一个粒子的强核力所限定的中心势阱中. 这种量子力学穿越效应没有经典的对应体. 当然, 势阱高度与粒子动能的比率越大, 穿越的可能性就越小。

采用 WKB 近似得到量子隧穿概率, 才可计算得正确的反应效率.

$$P \sim \exp\left(-2 \int_{r_n}^{r_c} \frac{\sqrt{2m[V(r) - E]}}{\hbar} dr\right)$$

这里的 P 表示穿越的概率, $r_c = \frac{Z_i Z_j e^2}{E}$, $r_n \sim A^{1/3} R_0$, 考察积分

$$\int_{r_n}^{r_c} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E} dr = \int_{x_n}^{x_c} \sqrt{Z_1 Z_2 e^2 - E x^2} dx$$

积分公式有

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$$

这里恰有 $r_c = \frac{Z_i Z_j e^2}{E}$, 舍去小量得到

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{E}} 2\pi \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\right\} := P_0 \exp(-bE^{-1/2})$$

将 $S(E)$ 定义为能量的某个 (我们希望能是) 缓变函数, 我们现在可以将截面表示为:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-bE^{-1/2}}.$$

有

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m}\right)^{1/2} (kT)^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \underbrace{\exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right)}_{f(E)} dE.$$

其中 $e^{-E/(kT)}$ 项代表 Maxwell-Bol 分布的高能翼, 而 $e^{-bE^{-1/2}}$ 项来自穿透概率, 这两个因子的乘积产生了一条很强的尖峰曲线, 即以 George Gamow 之名命名的伽莫夫峰, 该物理学家首先研究了核坍缩穿透。在如下能量处出现曲线的顶部:

$$\frac{df}{dE} = 0 \Rightarrow E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3}$$

作为伽莫夫峰的结果, 对反应率积分的最大贡献出现在相当窄的能带中, 该能带取决于气体的温度, 以及核反应成分的电荷和质量。峰值处记

$$f(E_0) = \exp(-\tau), \tau = \frac{3E_0}{kT} = 19.72 \left(\frac{Z_i^2 Z_j^2 A}{T_7}\right)^{1/3}$$

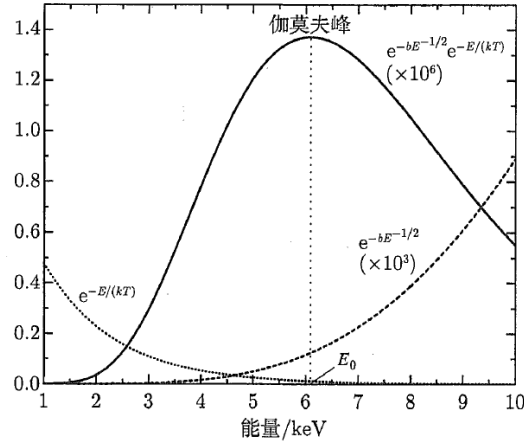


图 1.3: 伽莫夫峰

用高斯函数近似拟合

$$f(E) \approx f(E_0) \exp \left[- \left(\frac{E - E_0}{\Delta E} \right)^2 \right]$$

作泰勒展开进行逐级比对

$$f(E) = f(E_0) + f'(E_0)(E - E_0) + \frac{1}{2}f''(E_0)(E - E_0)^2 + \dots$$

简化运算可采用对数求导法. 推得

$$\Delta E = \left(\frac{4E_0 kT}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

现在

$$\int_0^{\infty} f(E) dE \approx e^{-\tau} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{E - E_0}{\Delta E} \right)^2 \right] dE \approx e^{-\tau} \sqrt{\pi} \Delta E$$

有

$$\langle \sigma v \rangle \approx \frac{8}{9} \left(\frac{2}{3m} \right)^{1/2} \frac{S(E_0)}{b} \tau^2 e^{-\tau} = \frac{7.21 \times 10^5}{Z_i Z_j A} \left(\frac{S(E_0)}{\text{keV cm}^2} \right) \tau^2 e^{-\tau} \propto \frac{1}{T^{2/3}} \exp \left(- \frac{C}{T^{1/3}} \right)$$

用幂律分段拟合

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu, \quad \nu = \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} - C \frac{\partial T^{-1/3}}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} T^{-4/3} T C = \frac{\tau - 2}{3}$$

1.11.1 共振

然而，在某些情况下， $S(E)$ 可以相当迅速地变化，在特定能量处达到峰值。这些能量对应于原子核内的能级，类似于电子的轨道能级。正是入射粒子的能量与原子核内能级差之间的共振导致了这些强峰。

$$\xi(E) \propto \frac{1}{(E - E_{res}^2) + (\Gamma/2)^2}$$

1.11.2 电子屏蔽

影响反应率的另一个因素是电子屏蔽。在恒星内部热核反应区，物质完全电离成等离子体。带正电的原子核将吸引周围的自由电子，形成一个带负电的电子云将其包围。周围电子云的存在部分地屏蔽原子核的库仑势垒，或者等效地使入射粒子的相对动能增大，其结果是使得穿越势垒的粒子数量增加，从而使得热核反应的速率增大。由等离子体物理相关结论，德拜长度

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n e^2}}$$

平均而言，在恒星内部的高温下，当原子电离时释放出电子，它们会产生负电荷的“海洋”，会部分隐藏靶核，减少其有效的正电荷。这种减少的正电荷的结果是使入射原子核面临一个较低的库仑势垒和一个增强的反应率。通过列入电子屏蔽，有效库仑势变为

$$U_{eff} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + U_s(r)$$

其中， $U_s(r) < 0$ 是电子屏蔽的贡献。电子屏蔽可以是显著的，有时可以将产生氦的反应增强 10%~50%

1.12 元素组成与能量产生率

一个核反应进行的快慢由其反应速率决定。对于恒星内部发生的核反应来说，决定反应速率的物理因素主要有两个：参与反应的两个粒子克服它们之间的库仑（Coulomb）势垒的概率，以及进入核力范围后第三者发生碰撞的概率。前者与两个粒子间对运动的动能密切相关，后者则取决于两个粒子所组成的复合系统的结构。

单位体积反应率

$$r_{ij} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} n_i n_j \langle \sigma v \rangle$$

代入元素 $n_i = \frac{X_i \rho}{A_i m_u}$ ，有

$$r_{ij} = \frac{1}{(1 + \delta_{ij})} \frac{\rho^2 X_i X_j}{A_i A_j m_u^2} \langle \sigma v \rangle = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \frac{\rho^2 X_i X_j}{A_i A_j m_u^2} \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^v$$

于是我们可以定义核反应时标，反应发生显著核反应改变的特征时间

$$\tau_{ij} = \frac{1}{n_j \langle \sigma v \rangle_{ij}}$$

严格的来说，要描述某粒子的变化量，除了反应损失外还有别的核反应的产生量，即

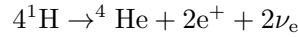
$$\frac{dn_i}{dt} = - \sum_j (1 + \delta_{ij}) r_{ij} + \sum_{k,l} r_{kl,i}$$

不过我们一般忽略后者. 经过上述讨论，因此单位质量物质的核能产生率

$$\epsilon_{ij} = \frac{Q_{ij} r_{ij}}{\rho} = \frac{Q_{ij}}{(1 + \delta_{ij}) A_i A_j m_u^2} \rho X_i X_j \langle \sigma v \rangle_{ij} = \frac{q_{ij}}{(1 + \delta_{ij}) A m_u} \rho X_i X_j \langle \sigma v \rangle_{ij}$$

1.13 氢燃烧

氢是恒星中最丰富的元素，氢聚变为氦的反应也是恒星中最主要的能量来源。恒星中的氢燃烧一般温度范围 8e6K-5e7K，在重子数守恒、轻子数守恒、电荷守恒的约束下，反应式



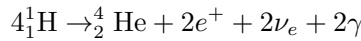
氢燃烧过程中氢质量分数变化从产能率反推，扣除中微子损失后

$$\frac{dX_{\text{H}}}{dt} = -4A_{\text{H}}m_u \frac{\epsilon}{Q_{\text{eff}}}, \quad \frac{d\bar{X}_{\text{H}}}{dt} = -\frac{1}{M} \int_0^M 4A_{\text{H}}m_u \frac{\epsilon}{Q_{\text{eff}}} dm = -\frac{4A_{\text{H}}m_u}{\bar{Q}_{\text{eff}}} \frac{L_s}{M}, \quad \bar{X} = \frac{1}{M} \int_0^M X_{\text{H}} dm$$

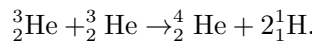
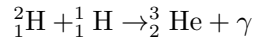
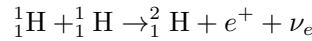
依照反应温度不同，氢燃烧一般有两个路径，pp chain 与 CNO cycle

1.13.1 pp chain

应用守恒定律，可以将氢转化为氦的反应链之一是第一质子-质子链 (PP I)。它涉及一个反应序列，通过中间产物氘 (^2H) 和氦-3 (^3He)，最终导致

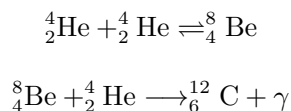


整个 PP I 反应链为



1.14 氦的燃烧

氦转化为碳的反应序列称为 3α 过程。这个过程得名于历史上的一个结果，即卢瑟福证明在某些类型的放射性衰变中探测到的神秘 α 粒子是氦-4 (${}^4_2\text{He}$) 原子核。 3α 过程是

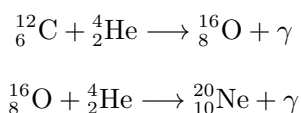


在 3α 过程中，第一步产生了一个不稳定的铍核，如果不立即被另一个 α 粒子撞击，它将迅速衰变回两个独立的氦核。结果，该反应可被认为是三体相互作用，因此，反应速率取决于 $(\rho Y)^3$ 。

1.15 更重元素的燃烧

1.15.1 碳燃烧

在氦燃烧的高温环境中，其他竞争过程也在起作用。在通过 3α 过程产生足够的碳之后，碳原子核就有可能捕获 α 粒子，从而产生氧。一些氧依次可以捕获 α 粒子，从而产生氖。（这里虽然有氧参与反应，但并不是真正意义上的氧燃烧的主导供能）

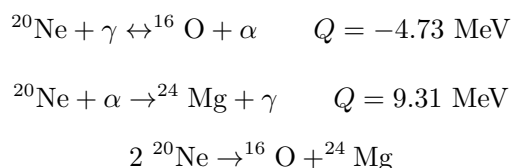


在氦燃烧的温度下，继续俘获 α 粒子会导致原子核的质量越来越大，由于库仑势垒越来越高，这很快就会变得令人望而却步。

如果一颗恒星具有足够大的质量，就可以获得更高的中心温度，许多其他的核产物也就成为可能。

1.15.2 氖燃烧

氖燃烧在碳燃烧晚期开始，并非是两个氖直接作用，而主要是通过光致裂解过程与 α 粒子捕获两个连续过程，整体上为吸热反应



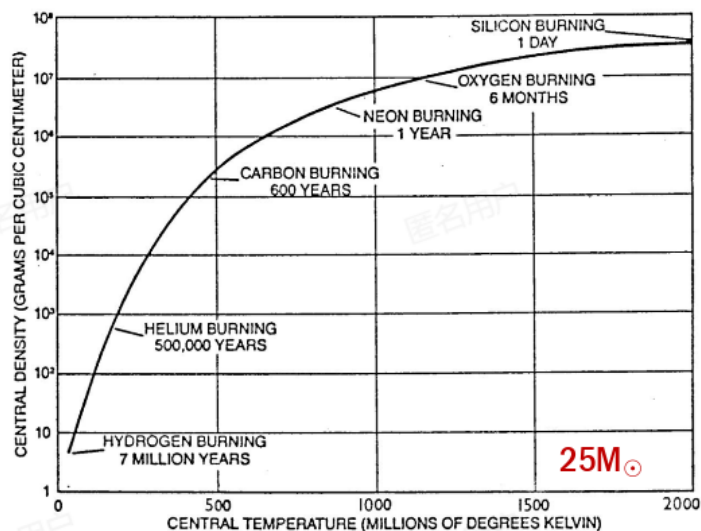


图 1.5: 核元素燃烧的温度与时标

1.15.3 氧燃烧

氧燃烧产生硅，直接反应产生库仑位垒过高而无法进行，通过 α 捕获相对位垒较低。注意 ^{56}Fe 不是直接合成的，而是 ^{56}Ni 衰变得到。产物 ^{56}Fe 结合能高，不易被光致裂解，当温度高于 $5 \times 10^5 \text{K}$ ，铁核被光致裂解（超新星爆发，有时 Ni 还未完全转化为 Fe 爆发已然产生）

1.16 元素合成

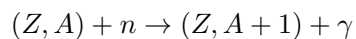
1.16.1 原子核稳定性

根据原子核物理中的幻数理论，质子数或中子数为幻数时稳定，另外 $N = Z$ 且为偶数较为稳定

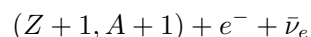
目前已经确认的幻数有：2、8、20、28、50、82、126 这七个幻数。自然界广泛存在的氦、氧、钙、镍、锡、铅元素的质子数分别与 2 到 82 的幻数相对应。质子数为 126 的元素目前尚未发现，预计其处于放射性超重元素稳定岛的中央。当原子核之质子数和中子数皆为幻数时，这样的情况称为双幻数。例如自然界存在质子数 82、中子数 126 的铅同位素 ^{208}Pb ，就具有双幻数，显得异常稳定。幻数的存在反映了原子核具有“壳层结构”。

1.16.2 s/r-process

中子捕获反应



以及 β 衰变



根据中子俘获时标与 β 衰变时标的比较关系，分为慢中子俘获过程 (s-process)，一般适用于较小质量的恒星，与快中子俘获过程 (r-process)，如超新星爆发，双中子星并合等爆发性事件

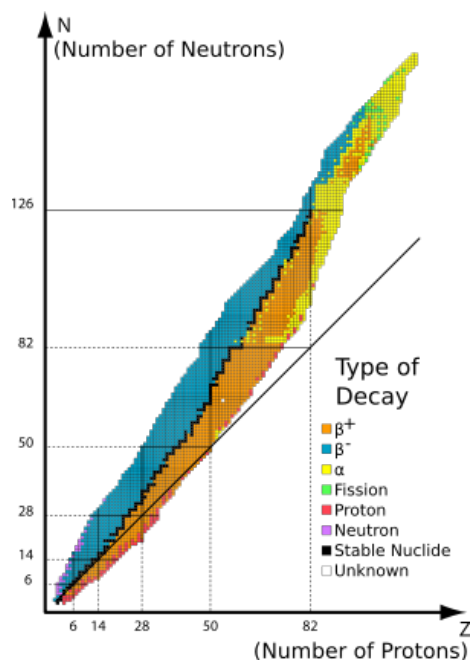


图 1.6: 幻数

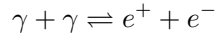
1.17 中微子发射

在研究 β 衰变中，在考虑所有已知粒子能量后，发现能量竟然不守恒。在那个量子力学的新生时期，玻尔选择大胆抛弃能量守恒定律，但相对的泡利坚定认为能量守恒是具有普适性的，引入了中微子的概念 (I have done something very bad today by proposing a particle that cannot be detected; it is something no theorist should ever do.)，这一理论在后来的实验中得到证实。

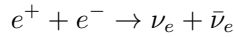
在恒星演化晚期，中心核内的温度和密度都非常高，可以引发多种中微子过程。由于中微子与物质作用的概率非常小，很容易逃离恒星，因此成为恒星内部一种非常有效的冷却机制，并对恒星的晚期演化和 SN 爆发起到非常关键的作用。太阳中微子自由程

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n} \sim 10^{20} \text{cm}$$

当温度高于 10^9K 时，光子的平均能量已经高于正负电子对的静止质量对应的能量。于是，正负电子对将产生与湮灭，并与辐射场达到平衡：



与此同时，正负电子对也可以通过弱相互作用产生：



恒星内部，温度低于 10^9K 时，存在康普顿散射 ($\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$)，散射频率取决于光子密度 $r = \sigma n v \sim T^3 \cdot T^4 \cdot T = T^8$ ，因此高温下反应有效。高温下正负电子对/双光子湮灭

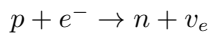
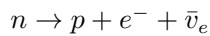
还有一种过程为恒星内部的等离子体震荡。恒星演化晚期，中心核的密度变得非常高，自由电子开始出现简并现象。这时等离子体中出现的中微子过程可以造成大量的能量损失。电磁波穿过等离子体，电子质量较小容易发生响应产生一个整体的周期性运动，离子质量较大基本不动，发生电荷分离产生震荡，震荡频率

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

辐射可以将其携带的能量传递给等离子体而衰变正负电子对，同时也存在一定几率衰变为电子对。经典的等离子体振荡的能量是连续的，从量子力学角度看，可量子化看为准粒子等离激元，衰变成为光子进而成为正负电子对，这种方式也会产生中微子。

韧致辐射是指高速电子骤然减速产生的辐射。泛指带电粒子在碰撞（尤指它们之间的库仑散射）过程中发出的辐射。例如一个高能电子与一个原子核相碰撞时就产生这种辐射。根据拉莫定律，有加速度就会发射电磁波。也有机会产生中微子，低温低密有效。

urca 过程一般发生在恒星演化后期或致密星中。该过程通过中子和质子的来回相互转换，辐射出大量的中微子和反中微子，从而释放能量使得中子星发生迅速冷却。



密度较高，反应容易发生，且要保证能量守恒与动量守恒。动量全部由费米动量主导，密度越高费米能堆积能级越高，提供更多衰变产物占位。修正 Urca 过程引入旁观粒子，降低密度需

求

$$\begin{aligned} n + n &\rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e \\ p + n + e^- &\rightarrow n + n + \nu_e \end{aligned}$$

1.18 恒星结构与演化方程组

经过之前的讨论，我们可以总结构建恒星模型的基本方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{\partial P}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad \frac{\partial r}{\partial t} = 0, \text{ 流体静力学平衡} \\ \frac{\partial l}{\partial m} &= \epsilon_{nuc} - \epsilon_\nu - T \frac{\partial s}{\partial t} \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \text{ 热平衡} \\ \frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad \text{with} \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{rad} = \frac{3\kappa}{16\pi acG} \frac{lP}{mT^4} & \text{if } \nabla_{rad} \leq \nabla_{ad} \\ \nabla_{ad} + \Delta \nabla & \text{if } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \end{cases} \\ \kappa &= \kappa_0 \rho^a T^b \text{ Kramers 不透明度, 如 } a = 1, b = -3.5 \text{ 自由-自由吸收主导} \\ \frac{\partial X_i}{\partial t} &= \frac{A_i m_u}{\rho} \left(-\sum_j (1 + \delta_{ij}) r_{ij} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) [+ \text{mixing terms}] \quad i = 1 \dots N \\ P &= P(\rho, T, \mu) \text{ (EOS)} \end{aligned}$$

且边界条件

中心($m = 0$):

$$r = 0, l = 0$$

表面($m = M$):

$$P = 0, T = 0$$

光球层($m \approx M$) $\tau_{ph} = \int_R^\infty \kappa \rho dr \approx \kappa_{ph} \int_R^\infty \rho dr = 1$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{R^2} \rho \implies P(R) \approx \frac{GM}{R^2} \int_R^\infty \rho dr$$

$$L = 4\pi \sigma R^2 T_{eff}^4$$

1.19 习题

1. 在太阳核心区域, 温度为 $1.5 \times 10^7 \text{K}$, 物质密度为 150g/cm^3 . 已知氢和金属元素的质量分数分别为 $X = 0.35$ 和 $Z = 0.02$. 电子在完全简并态下的压强 P_{deg} 与理想气体状态下的压强 P_{eg} 的比值。

2. 一团气体中氢和氦的质量分数分别为 X, Y (忽略金属元素), 密度为 ρ , 温度为 T . 氢原子的电离度为 f_H , 氦原子的电离度为 f_{He} . 求平均分子量 μ 和压强

3. 考虑一个处于流体静力学平衡状态下的恒星, 内部压力 P 包含气压 P_{gas} 和辐射压 P_{rad} . 其中 $P_{\text{gas}} = \beta P, P_{\text{rad}} = (1 - \beta)P$. 气体为非相对论性下的理想气体. 如果 β 在整个恒星中为定值, 证明:

(1) 恒星的总能量 W 与自引力势能 Ω 的关系满足 $W = \frac{\beta}{2}\Omega$

(2)

$$P = \left(\frac{3k_B^4}{a\mu^4 m_u^4} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \rho^{4/3}$$

4. 设一质量为 M 的恒星内部密度随半径 r 的变化为 $\rho = \rho_c(1 - x)$, 其中 ρ_c 为中心密度, $x = r/R, R$ 恒星外半径. 写出压强 $P(x)$ 和温度 $T(x)$ 的表达式 (可假设气体是理想气体)。

5. 考虑一处于流体静力学平衡状态下的恒星, 其内部气体可用非相对论性的理想气体近似, 且不透明度 κ 恒定, 推导该恒星光度 L 与其质量 M 之间的关系 (提示: 光度与质量的关系具有 $L \propto M^n$ 的形式, n 值为多少?)

6. 估算太阳核心区域产生的一个光子到达太阳表面需要的时间以及光子的一个平均自由程内周围环境温度的变化量

7. 令恒星内部辐射压与总压强的关系满足 $P_{\text{rad}} = (1 - \beta)P$, 证明不出现对流的史瓦西判据可写为

$$l < 4(1 - \beta)\nabla_{\text{ad}} l_{\text{Edd}}$$

该判据也给出了当辐射为主导能量运输的方式时, 光度的上限, 比较该判据与爱丁顿极限哪个更容易满足。

8. 考虑 H 燃烧的 CNO 循环, 在 $T = 2 \times 10^7 \text{K}$ 时, 以下几种核的质子捕获反应时标为 $\tau_p(^{15}\text{N}) = 30 \text{yr}, \tau_p(^{13}\text{C}) = 1600 \text{yr}, \tau_p(^{12}\text{C}) = 6600 \text{yr}$ and $\tau_p(^{14}\text{N}) = 6 \times 10^5 \text{yr}$. 估算 CN 平衡时的这两个元素的相对丰度

9. 证明流体静力学平衡条件可以写为

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\bar{\kappa}}$$

其中 τ 为光深, $\bar{\kappa}$ 为不透明度

10. 估计太阳压力标高的典型值

11. 考虑恒星在 He 燃烧阶段只有 3α 反应 (7.275MeV) 以及 ^{12}C 的 α 捕获过程 (7.162MeV), 且假设 He 燃烧最终产物中 C 与 O 各占 50% 的质量, 计算此过程中平均每克 He 释放的能量

Chapter 2

恒星形成与演化

2.1 同调关系 Homology Relations

2.1.1 同调关系

本质是一种相似方法，定义同调关系

$$x = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$$
$$\frac{r_1(x)}{R_1} = \frac{r_2(x)}{R_2}$$

代入质量连续性方程，

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{M_1}{4\pi r_1^2 \rho_1}$$
$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{M_2}{4\pi r_2^2 \rho_2} \cdot \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right] \Rightarrow \frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-3} \Rightarrow \rho(x) \propto \rho_c \propto \bar{\rho}$$

知道一颗恒星密度分布，就可得到另一颗恒星密度。再代入流体静力学方程

$$\frac{dP_1}{dx} = -\frac{GM_1^2 x}{4\pi r_1^4} \quad \frac{dP_1}{dx} = -\frac{GM_2^2 x}{4\pi r_2^4} \cdot \left[\left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right] = \frac{dP_2}{dx} \cdot \left[\left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right]$$
$$\Rightarrow \frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-4}$$

即有

$$P(x) \propto P_c \propto \frac{M^2}{R^4} \Rightarrow M^{2/3} \rho^{4/3}$$

现在再考虑温度，考虑理想气体且假设恒星整体组成均匀，有

$$P = \rho \frac{k}{\mu m_u} T \Rightarrow \frac{\rho_1(x) \mu_2 T_1(x)}{\rho_2(x) \mu_1 T_2(x)} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \right)^{\frac{4}{3}}$$

μ 换回直接的观测量

$$\frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \frac{\mu_2 M_2}{\mu_1 M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} \Rightarrow T(x) \propto T_c \propto \mu \frac{M}{R}$$

再代入辐射平衡下温度与质量关系

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla_{ad}$$

得到

$$\frac{d(T^4)}{dx} = -\frac{3M}{16\pi^2 ac r^4} \kappa l \Rightarrow \left(\frac{T_2(x)}{T_1(x)} \right)^4 = \frac{l_2(x) M_2 \kappa_2}{l_1(x) M_1 \kappa_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-4} \Rightarrow \frac{l_2(x)}{l_1(x)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^3 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{-1}$$

其中第一个箭头利用配凑达到 $\frac{dT_1(x)}{dx}$ 与 $\frac{dT_2(x)}{dx}$ 的形式，且 $r/R = \text{const}$ 使得本与 x 有关的量消去的效果，与之前得到的温度比联立，则得到质光关系

$$\frac{l_2(x)}{l_1(x)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^3 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{-1} \Rightarrow L \propto \kappa^{-1} \mu^4 M^3$$

现在我们还没用到热平衡条件，若蕴含自由-自由吸收，可使用 Kramers 不透明度 $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$ ，得到

$$\frac{l_2(x)}{l_1(x)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{7.5} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{5.5} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{-0.5}$$

2.1.2 同调收缩

现在考虑恒星物理量的时间演化问题。定义 $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ，变化具有自相似性

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{R}}{R}$$

这恰恰符合对数求导规则，因此对于幂律关系容易求得

$$\frac{\dot{\rho}(m)}{\rho(m)} = -3 \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\frac{\dot{P}(m)}{P(m)} = -4 \frac{\dot{R}}{R} = \frac{4}{3} \frac{\dot{\rho}(m)}{\rho(m)}$$

由一般性的 $P = p_0 \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T}$ (姑且不管 μ)

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{\chi_T} \left(\frac{4}{3} - \chi_\rho \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\chi_T} (3\chi_\rho - 4) \frac{\dot{R}}{R}$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

2.2 分子云坍缩-Jeans 不稳定性

一般认为, 恒星形成于巨大而稀薄的分子云中。观测表明, 巨型分子云都处于一种大体上平衡的状态, 其自身的引力被云中的热运动所抵消。由于引力的不稳定性, 分子云坍缩碎裂, 形成局部密度增高的云核。此外, 分子的碰撞和超新星 (SN) 爆发过程也会干扰这种脆弱的平衡, 导致分子云内部密度的不均匀。周围的气体不断向云核沉积, 使得云核质量不断增加。当云核的压力上升到引力相当, 并开始建立流体静力学平衡时, 一颗原恒星就开始孕育产生了。此后, 随着云体的继续塌缩, 原恒星的质量不断增加, 最终其中心温度达到气燃烧的点火温度。从此, 原恒星迈入了其作为一颗恒星的生命周期。

流体力学给出 (其实就是牛顿第二定律和流体静力学方程)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} \quad \nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad P = \frac{\rho k_B}{\mu m_u} T = c_s^2 \rho$$

现赋予微扰, 考虑 infinite homologous gas at rest (density and temperature are constant everywhere)

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad P = P_0 + P_1 \quad v = v_0 + v_1 \quad g = g_0 + g_1$$

略去高阶小量, 分母上的和式利用泰勒展开, 方程化为

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0} + \vec{g}_1$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G \rho_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1$$

这是一个波动方程的形式, 可以平面波 $Ae^{i(kx - \omega t)}$ 为试探解, 有色散关系

$$-\omega^2 \rho_1 = -c_s^2 k^2 \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1 \Rightarrow \omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$$

若 ω 为实数, 相应为小震荡波, 但若为虚数, 扰动幅度将越来越大 (e 指数), 系统不稳定, 自引力越来越强, 继续坍缩下去, 判据

$$k < \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}} \text{ or } \lambda > \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho_0}} \equiv \lambda_J$$

这一特征尺度 λ_J 称为 Jeans 长度, 分子云尺度与 Jeans 尺度相比可判定系统稳定性, Jeans 质量

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3$$

2.2.1 其他判据

分子云坍缩临界实际上是自引力能与热能的对抗, 因此还可以量级估计

$$\left|\frac{\Omega}{U}\right| = \frac{GM^2/R}{(3/2)NkT} = \frac{2Gm_u\rho R^2}{3kT} \sim \left(\frac{R}{\lambda_J}\right)^2$$

或是动力学自由落体时标与声速穿越时标相比较

$$t_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}, t_{cs} = \frac{\lambda_J}{c_s}$$

还可以从 Virial 定理出发, 由于分子云本身密度很低, 此时外表面压强不可忽略, 先前的 $4\pi Pr^3|_0^R$ 不再为 0, 于是

$$2E_c + \Omega = 2C_v MT - q\frac{GM^2}{R} = 4\pi P_{equ} R^3$$

q 只是引力势前一个系数, 若采用多方球模型则 $q = \frac{3}{5-n}$, 由此得到

$$P_{equ} = \frac{c_v MT}{2\pi R^3} - \frac{qGM^2}{4\pi R^4}$$

极限分析, $R \rightarrow \infty, P \rightarrow 0^+$; $R \rightarrow 0, P \rightarrow -\infty$, 且趋近的缓度不同, 因此必然有极值, 且是个不稳定点, 导数为 0 得到

$$R_J = \frac{2qGM}{3C_v T}$$

$R > R_J$ 稳定, 注意这是给定质量条件, 若给定密度 M 换为 $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, 判据将变为 $R < \square$ 的形式

2.2.2 磁场与湍流的影响

磁场会提供额外的压强，磁力线密时磁场强度大，压缩时会克服做功。用磁能密度

$$u_B = \frac{B^2}{8\pi}$$

与引力势能密度

$$u_G = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^3 \pi R^3} = \frac{9}{20\pi} \frac{GM^2}{R^4}$$

这样得到临界质量

$$M_B = \sqrt{\frac{5}{18G}} BR^2$$

分子云内部静止其实只是宏观上的平衡，内部有没有整体定向的湍流，不规则运动也会提供额外压强，穿越时标改写为

$$t_{cs} = \frac{\sqrt{c_s^2 + v_{turb}^2 + v_A^2}}{\lambda}$$

湍流很多情况下是超声速的，产生激波

2.3 等温坍缩与碎裂

分子云存在许多尘埃且会发射辐射，用内能密度除去特征辐射速度得到热调节时标，它是远小于动力学时标的，当温度与外界相等时，将发生等温坍缩，随着密度增加，Jeans 质量减小，临界质量更小，从而越容易坍缩。密度不均匀性使得分子云内部局部区域也满足不稳定性发生坍缩。因此除了整体上的坍缩外还有内部局域性的非同调坍缩，这一结果将造成分子云的不断碎裂。密度增大同时也造成不透明度增大，光深增加，虽然时标还是很短，但光不再那么容易出去，要发生许多次散射，到某一程度时分子云内部内能聚集温度增加，等温坍缩转变为绝热坍缩。

定性分析 $P \sim \rho^\gamma, T \sim \rho^{\gamma-1} \Rightarrow M_J \sim T^{3/2} \rho^{-1/2} \sim \rho^{\frac{3}{2}(\gamma-\frac{4}{3})}$ ，绝热段 $\gamma = 5/3$ ，Jeans 质量随着坍缩而增大，会超过本身团块的质量时，变得稳定了，不能进一步坍缩与碎裂，大概到 $10^{-14} - 10^{-13} \text{g/cm}^3$ ，可视为原恒星诞生。

我们可以估计云团最小碎裂尺度，核心思想是看产生能量能不能被及时释放出去。用玻尔兹曼定律，

$$\dot{E}_{rad} = 4\pi f \sigma T^4 R^2$$

与引力能

$$\dot{E}_{grav} \approx \frac{GM^2}{R} \sqrt{G\rho}$$

相比较。并不是一进入绝热就停止坍缩，而是用 Jeans 质量与上式将得到的特征质量去比较

$$M_{lim}^5 \approx \frac{64\pi^3}{3} \frac{\sigma^2 f^2 T^8 R^9}{G^3}$$

从而得到最小 Jeans 质量

$$M_{J,\min} = 0.05 f^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{10K} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\mu}{0.6} \right)^{-\frac{3}{4}} M_{\odot}$$

这是从云团碎裂角度得到的质量，但实际上要称为恒星需要氢稳定燃烧要 0.08 太阳质量，褐矮星质量介于两者之间。

2.4 原恒星 Protostella 与前主序星 Pre-main-sequence star

2.4.1 绝热收缩

当云团的质量开始小于 Jeans 质量时，云团中心部分区域的温度最高，将首先建立流体静力学平衡，并形成原恒星遮面；云团外部的的气体仍然以近自由的方式下落至原恒星表面。在原恒星内部，自热压缩的过程中，将遵循 Virial 定理继续进行收缩，其内部的气体不断被加热。当温度升高到物质的离解或者电离温度时，释放的引力势能不再使气体的温度升高，而是使其密度增加并保持温度大体不变。于是，原恒星内部压力无法支持其自身，并再次出现自由塌缩，氢分子化学键断裂成氢原子吸热，这是一个气体相变过程，绝热因子减小，又会发生二次坍缩。后面氢原子再电离又会发生一次……直到所有物质完全电离为止。此后，流体静力学平衡再次建立。显然，离解和电离决定了能量的总和必须小于收缩过程中所释放的引力势能的一半。由此我们可以给出原恒星的理论最大质量。

从观测的角度来看，小质量恒星的形成过程经过四个阶段：

1. 云核所具有的初始动量使得其吸积下落气体的过程是各向同性的：中心部分的坍缩较快形成原恒星，云团会在收缩过程中形成关键结构，它们被深埋在下落气体和尘埃组成的包层中。云核中物质首先达到吸积盘，然后原恒星再从吸积盘吸积物质到其表面。周围气体向核心掉落，核心质量增加，进一步收缩，温度进一步升高。

2. 原恒星中心氦点火：产生对流和辐射差异转放大了磁场，使得原恒星表面出现强烈的星风。星风从阻力较小的自转轴方向喷出，形成径向的双极外向流。

3. 随着喷流强度逐渐增强，其速度也逐步减弱。

4. 吸积盘大部分耗尽，或被恒星风/辐射压驱散，剩下的部分有可能形成行星系统。当中心氢燃烧开始动后，原恒星成为稳定的主序星。

和小质量恒星的形成过程相比，大质量恒星形成时的坍缩时间标志很短，同时坍缩释放的引力势能会产生极强的紫外辐射，并且很快清空周围的下落气体。这会使得原恒星质量进一步

增加。最近的观测证据显示，大质量原恒星周围可能存在尘埃盘。由于绝大部分辐射从原恒星周围清空的区域逃逸出来，而不会对尘埃盘产生强烈的加热。于是，云团外部的气体可以通过尘埃盘继续落向原恒星。此外，形成大质量恒星的云团相对较大，同时外界与云团之间的干扰也有利于云团内恒星的形成过程。这会触发大批原恒星的同时形成，并组成星团。

2.4.2 林忠四郎线

当原恒星质量不再增加，将依照 Virial 定理继续收缩，成为一颗主序前恒星，收缩过程释放的引力能的一半将传递到恒星表面辐射掉，由于此时恒星半径很大，于是其光度也很高，并在恒星内部形成较大的温度梯度。根据对流的 Schwarzschild 判据，此时恒星内部是完全对流的，假定恒星内部温度梯度等于绝热温度梯度。

$$\nabla = \nabla_{ad}, \text{ 其中 } \nabla_{ad} = \frac{d \ln T}{d \ln P}$$

我们将假设 P 和 T 之间的这种简单关系适用于直到光球层的整个内部，即我们忽略了光球层正下方范围内的超绝热性。我们还忽略了 H 和 He 部分电离的表面附近区域的 ∇_{ad} 抑制。因此，我们简单地假设 ∇_{ad} 在整个恒星内部都是恒定的，比如 $\nabla_{ad} = 0.4$ ，这是完全电离的理想气体的值。实际上以上粗糙的简化，我们必然会在 P, T 分层中引入错误。然而，它们对于相邻的模型几乎是相同的，我们可以希望至少获得正确的微分行为。

此时满足多方关系

$$P = K_0 \rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad n = \nabla_{ad}^{-1} - 1 = \frac{3}{2}$$

即

$$P = K_0 \rho^{\frac{5}{3}}$$

利用理想气体状态方程，相应地有 $T - P$ 间关系

$$P = \left(\frac{\mathfrak{R}T}{\mu K_0^{\frac{3}{5}}} \right)^{\frac{5}{2}} := C_0 T^{\frac{5}{2}} M^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}}$$

这里

$$C_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\mu} \right)^{5/2} \left(\frac{5\xi_{\frac{3}{2}}^2}{8\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{\xi} \frac{du}{d\xi} \right)_{\xi_{\frac{3}{2}}}^{\frac{1}{2}}$$

多方模型利用引力势泊松方程化为 Emden 方程中有代换 $\xi = Ar$ ，其中

$$A = \sqrt{\frac{4\pi G}{K_0(1+n)} \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}$$

且有解算结果

$$M = 4\pi\rho_c R^3 \left(-\frac{1}{\xi} \frac{du}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_n}, \quad \rho_c = \bar{\rho} \left(-\frac{3}{\xi} \frac{du}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_n}^{-1}$$

于是这里

$$A^2 = \left(\frac{\xi_{\frac{3}{2}}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{5K_0} \rho_c^{\frac{1}{3}}$$

于是

$$K_0 = \frac{8\pi G}{5} \rho_c^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{\xi_{\frac{3}{2}}} \right)^2 = \frac{8\pi G}{5} \left[\frac{3}{4\pi} \left(-\frac{3}{\xi} \frac{du}{d\xi} \right)_{\xi_{\frac{3}{2}}}^{-1} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\xi_{\frac{3}{2}}} \right)^2 M^{\frac{1}{3}} R$$

为了得到恒星光球温度 T 和 P 的值与恒星可观测量, 如光度 L 和有效温度 T_{eff} 之间的联系, 在光球以外应用灰大气模型

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{GM}{R^2 \kappa}$$

假设不透明度 κ 对温度和压强的依赖关系为

$$\kappa = \kappa_0 P^p T^q$$

从光深 $\tau = 0$ 处开始积分, 并利用当 $T = 0$ 时 $P = 0$ 的零边界条件给出

$$T^{4-q} = \frac{3\kappa_0 R^2 T_{eff}^4}{16GM} \frac{4-q}{p+1} P^{p+1}$$

在光深为 $\frac{2}{3}$ 处, 边界条件要求内外解在边界处相衔接代入前述 $T - P$ 间关系消去 P 即

$$T_{eff}^{4-q} = \frac{3\kappa_0 R^2 T_{eff}^4}{16GM} \frac{4-q}{p+1} C_0^{p+1} T_{eff}^{\frac{5}{2}p + \frac{5}{2}} M^{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}p - \frac{3}{2}}$$

再利用

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

于是

$$T_{eff}^{-q} = \frac{3\kappa_0}{16GM} \frac{4-q}{p+1} C_0^{p+1} T_{eff}^{\frac{5}{2}p + \frac{5}{2}} M^{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{4}p + \frac{1}{4}} T_{eff}^{3p-1} (4\pi\sigma)^{\frac{3p-1}{4}}$$

取对数, 则

$$\left(q + \frac{11}{2}p + \frac{3}{2} \right) \log T_{eff} = \left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{2} \right) \log M + \left(\frac{3}{4}p - \frac{1}{4} \right) \log L + \log C_H$$

其中

$$C_H = \frac{16G}{3\kappa_0 C_0^{p+1}} \frac{p+1}{4-q} (4\pi\sigma)^{-\frac{3p-1}{4}}$$

这就是著名的林忠四郎线 (Hayashi Track) 方程, 他给出了完全对流恒星模型在 HR 图上的位置。若大气温度较低, 不透明度主要来自 H^- 的吸收, 粗略有 $p = 1, q = 3$ 方程改写为

$$\log T_{eff} = \frac{1}{5} \log M + \frac{1}{20} \log L + \frac{1}{10} \log C_H$$

这在 HR 图上几乎是一条垂直的直线, 反应线上光度对温度极度不敏感
林线的斜率强烈地依赖于不透明度的性质。

2.4.3 前主序星阶段

电离引起 γ 掉到 $4/3$ 以下从而致使再次坍缩, 最终达到真正的流体静力学平衡状态, 可以利用 Virial 定理估计, 引力势能一半用于加热恒星本身

$$\frac{1}{2} \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R_p} = \frac{M}{m_u} \left(\frac{X}{2} \chi_{H_2} + X \chi_H + \frac{Y}{4} \chi_{He} \right) \equiv \frac{M}{m_u} \chi$$

即释放的引力势能用于内部 H 和 He 的相变 (完全电离), χ 为平均每个核子解离能量, 推知

$$R_p \approx \frac{\alpha GMm_u}{2\chi} \approx 50R_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \right)$$

$$\bar{T} \approx \frac{\alpha \mu GM}{3\mathcal{R} R_p} = \frac{2\mu}{3k} \chi \approx 8 \times 10^4 \text{ K}$$

在该温度下, 不透明度很大, 辐射运输效率低, 因此原恒星可看作完全对流。满足同调收缩, 当收缩到一定程度时, 由于 $T_c \propto 1/R$, 温度升高, 有些核反应已经可以进行如 CNO 循环的 C 与质子作用, 不透明度降低, 核心区域变为辐射主导, 对流包层减少, 辐射核心增加, 恒星将脱离 Hayashi Line 在赫罗图上向左演化。最终温度上升至点燃核聚变, 氢开始燃烧。

刚刚演化达到主序 (MS) 的恒星, 其内部的化学组成是均匀的。中心氢燃烧过程中释放的热量刚好弥补了从表面辐射损失的能量, 而气体的消耗速度是非常慢的, 因此恒星的结构基本处于准静态。通常将处于这种状态的恒星在赫罗图中所处位置称为零年龄主序 (Zero-Age Main Sequence)。质量较小的恒星由于本身温度较低不透明度大几乎完全对流, 进入零龄主序没有明显的过程而几乎直接掉到零线上。另外金属丰度对零龄主序线的位置也有贡献, 金属丰度越低, 对于小质量恒星, 光深 (主要来自束缚自由吸收) 较大, 核心能量输运阻碍比较大, 要维持核燃烧应当提高反应率, 恒星整体上会有些许整体收缩, 半径减小且光度增高。但大质量恒星光深主要来自汤姆森散射则不能这样理解, CNO 循环主导, 金属丰度低代表 C 的量较少, 整体上核反应偏慢, 为对抗引力稍微收缩来补偿催化剂稀少的影响, 整体温度也会高些。

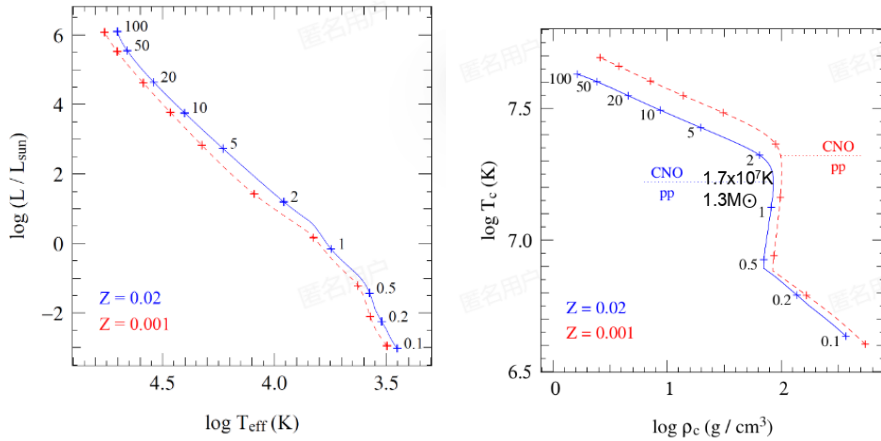


图 2.1: 不同元素丰度的零龄主序

2.4.4 零龄主序 ZAMS

对于一颗较大质量恒星来说，由于质量较大，当达到 ZAMS 时，其中心的温度较高，中心氢燃烧过程将以 CNO 循环为主，而质量较小时 pp chain，主要束缚自由吸收与自由自由吸收， κ 增大；质量更小时，几乎完全对流。故上图第二图有两道弯，第一个拐折为 CNO/pp 链主导的转折，第二个拐折是因为小质量恒星完全对流，某些同调关系不再成立（同调关系假定辐射主导）。依照输运不同，我们可以将恒星分为三类：

- $M < 0.4M_{\odot}$ ，完全对流（某些同调关系不成立）
- $0.4M_{\odot} < M < 1.2M_{\odot}$ ，辐射核心 + 对流包层
- $M > 1.2M_{\odot}$ ，对流核心 + 辐射包层

2.5 主序演化

2.5.1 H 燃烧阶段

H 转化为 He，平均一个粒子分到的质量增加，即 μ 增加，而 $L \propto \mu^4$ ，光度 L 增加。随着 H 丰度降低，单位质量产能率下降，为补偿损失恒星略收缩提高中心密度从而使得温度略微提高，这个提高是有限的，特别是对于 CNO 循环（20 幂次）。考察理想气体状态方程 $P_c/\rho_c \propto T_c/\mu$ ，于是核心密度增大或是核心压强减小。恒星结构将发生变化，核心包层的密度比变大，这种变化是非同调的。

CNO 主导对温度依赖非常敏感，非常集中于核心，对流核心，对流意味着物质有交换，外

部物质可以通过对流进入热的核心提供原料, 尽管温度低处不能发生燃烧但实际上找不到什么氢, 比较均匀; 但 pp 链随温度依赖没那么敏感, 往外温度虽然降低, 但核燃烧区域比例比较大, 但没有对流核心, 因此燃烧区周围还是有氢, 会呈一种连续分布。小质量恒星不需要包层膨胀或是很少膨胀减轻核心压力。

小质量 (下主序 LMS)

随着核心球中氢的耗尽, 通过 pp 链产生的能量一定程度上暂停。然而, 到目前为止, 核球温度已经上升到这样的程度: 在一个以氦为主的小球状区域, 有一个氦燃烧的厚壳层, 核聚变继续产生能量。在恒星内部 3% 的质量范围内, 光度保持接近于零, 同时, 同一区域的温度几乎是恒定的, 当光度梯度为 0, 氦核球应当是等温的。

下主序恒星通常具有较低的有效温度 ($T_{\text{eff}} < 7000 \text{ K}$)。于是氢和氦电离效应会使得当地的透明度变得非常大, 并由此导致辐射温度梯度远大于当地的绝热温度梯度, 而在其外包层内引发大范围的对流运动, 进而形成一个对流包层。一般来说, 质量越小的恒星, 其有效温度越低并导致其氢氦电离区的位置也就越深, 因此形成对流包层也就越厚。根据理想气体状态方程, 平均分子的上升将导致气体压力下降。然而, 根据流体静力学平衡方程, 恒星内部某处的压力是由其上全部物质的重力所造成的。因此, 恒星将缓慢地收缩, 以提高其内部的温度和密度来抵消平均分子的上升导致的压力下降。这将造成核燃烧过程的产能率和恒星光度逐步上升。由于 $\varepsilon \propto \rho T^4$, 温度与密度提升较多, ρ_c, T_c 增加较为明显。

H 燃烧率随能量依赖较弱, 辐射核心, H 丰度的梯度连续、光滑, 逐渐过度到壳层氢燃烧。HR 图中演化无突然拐折。

中等与大质量 (上主序 UMS)

不同于与 pp chain 氢燃烧过程的是, CNO 循环氢燃烧过程进行得相对较快, 因此使得 UMS 恒星在主序演化期间的寿命相对较短。

CNO 循环氢燃烧过程相对较高的产能率在上主序恒星中心区域引发大范围的对流运动, 并使得此时位于恒星中心附近的氢燃烧过程表现为对流燃烧现象。另一方面, 较高的有效温度将导致其外包层具有较低的不透明度。因此, 对流核心的整个恒星外包层将处于辐射平衡状态。随着中心氢燃烧过程的持续进行, 位于恒星中心的对流核心将逐渐缩小, 并且在对流外层形成一个越来越丰富的富氦区域。当核心燃料耗尽时, 对流运动将会在恒星中心附近完全消失。此外, 恒星将结束其主序阶段的演化。

由于这种不连续的间断, 中心氢耗尽后恒星整体收缩使得 T_{eff} 增加, 到壳层氢燃烧的过渡是不平滑的, 会发生一个突然拐折。此外, 由于产能率对温度十分敏感, 温度的提升是十分有限的, 中心压强将减小, 外包层膨胀降温。

2.6 后主序演化

不同质量的恒星在不同演化阶段，其中心温度和密度是不同的。这将直接影响到恒星中心核反应过程的发生方式，以及随后演化进程。

恒星中心核自由电子是否处于简并状态对其后演化进程具有至关重要的影响。如果自由电子是非简并的，则中心核内气体可以用理想气体来近似。当热核燃烧过程启动时，其释放的热量将加热气体导致其膨胀降温，这反过来限制了热核燃烧过程能量的进一步上升。当热核燃烧过程释放的热量刚好及时被传输出燃烧区时，恒星中心核将达到稳定状态。于是，在非简并的恒星中心核内，热核燃烧过程将以稳定的方式进行。反之，如果自由电子在恒星中心核内处于简并状态，情况则完全不同。此时，恒星中心核内的压力主要来自于处于简并状态的高速运动的电子，离子的热运动所产生的压力则很小。当热核燃烧过程启动时，其释放的热量会使得离子的温度上升。由于离子的压力不是以使得气体发生膨胀，因此温度的上升反过来将导致核心反应速率的增加。这样一个反馈过程将使得恒星中心核内的热核燃烧过程有时以失控方式进行，直到离子的压力最终超过电子并导致中心核膨胀降温为止；或者以爆炸式燃烧方式进行，并有可能导致诸如 SN 爆发等现象。

根据恒星中心的物理状态及其演化过程的不同，一般将恒星按质量分为三类，即：

1. 小质量恒星 ($M < 2M_{\odot}$): GF, 其中心氦核在点燃前处于简并状态, 发生氦闪, 而其演化的最终结局为 CO 白矮星;
2. 中等质量恒星 ($2M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$): AB, 其中心碳氧核处于电子简并状态, 平稳点燃氦, 而其演化的最终结局为 CO 白矮星;
3. 大质量恒星 ($M > 8M_{\odot}$): BO, 其中心核在成为铁核之前总是处于非简并状态; 可点燃碳, 随着铁核的坍缩, 其演化最终以超新星爆发结束。

当等温核球的质量变得太大, 核球不再能够支撑其上的物质时, 该演化阶段结束。勋伯格和钱德拉塞卡在 1942 年首次估计了存在等温核球并且仍然可以支撑其上覆盖层的恒星质量的最大占比 (Schönberg-Chandrasekhar 极限):

$$\left(\frac{M_{ic}}{M}\right)_{SC} \simeq 0.37 \left(\frac{\mu_{env}}{\mu_{ic}}\right)^2$$

能容纳在等温核球中并仍能保持流体静力学平衡的恒星质量的最大占比是核球和包层的平均分子量的函数。当等温氦核的质量超过这个极限时, 核球会在开尔文-亥姆霍兹时标下坍缩, 相对于主序演化的核时标, 此时恒星的演化非常迅速。对于质量低于约 $1.2M_{\odot}$ 的恒星, 这意味着主序阶段的结束。

2.6.1 镜像原则

壳层燃烧阶段，核心收缩 (膨胀) 对应包层膨胀 (收缩)。 镜像关系的本质源于能量产生、传输与力学平衡的耦合。我们可以定性地分析：

核心收缩 → 壳层燃烧增强 → 能量注入包层 → 包层膨胀

核心膨胀 → 壳层燃烧减弱 → 能量减少 → 包层收缩

2.6.2 壳层氢燃烧阶段：中等、大质量

随着核球中氢燃烧的停止，并没有一个厚厚的氢燃烧壳层能够立即产生能量，而是整个恒星参与了一个开尔文-亥姆霍兹时标（引力收缩时标）的整体坍塌。这一收缩阶段释放出引力势能，使光度略有增加，恒星半径减小和有效温度增加。最终，氢核外部的温度充分地升高，导致厚厚的氢壳层燃烧。由于壳层的点火速度非常快，覆盖的包层被迫轻微膨胀，吸收了壳层释放的一些能量。结果，光度瞬间降低，有效温度降低。在赫罗图上表现为 BCD 段。

较大质量恒星的壳层氢燃烧是一种突然的过程，核心在收缩，达到壳层氢点火温度，壳层氢被点燃。（注意区分壳层和包层，包层是恒星靠外部分，和燃烧没关系，而壳层指的是核心区域靠外的部分！）引力势能释放的过程是以热时标进行，恒星在短时间内迅速从赫罗图中蓝端演化到红端，短时标造成观测上很难发现这一阶段的恒星，即所谓很少有恒星占据的赫氏（Hertzsprung）间隙。

随着恒星包层的膨胀和有效温度的降低，由于 H^- 的额外贡献，光球不透明度增加。结果是，接近小质量和中等质量恒星的表面都会形成对流区。随着演化继续推进，对流区的底部扩展深入恒星的内部。由于与遍及恒星内部一些地方的对流有关的几乎绝热的温度梯度，以及能量传输到表面的效率，D 处几乎包层完全对流，恒星开始沿着 $H-R$ 图上 **红巨星支** (RGB) 迅速上升 (DE 段)。由于原理相同，这条路径依然是 Hayashi line。爬升 RGB 时，对流区纵深，直至对流区底部延伸到化学成分被核反应改变的区域，反应过的物质与其上方的物质混合，这种效应表现为光球层成分的可观测到的变化，物质从内部被传输到表面，称为挖掘 (dredge-up)

2.6.3 壳层氢燃烧：小质量

小质量恒星，形成氦核心质量较低，处于 SC 极限之下，慢慢趋向简并，核心没有什么收缩，包层不会有显著膨胀，会经过一个 **亚巨星支**，最终达到简并。

当氦核心简并后服从相同演化，不会有太大偏差。

没有 Hertzsprung gap。氢丰度高，则 μ 小，而压强是撑住外部物质，是流体静力学平衡的要求，于是只能是温度降低，核心部分会有个短暂降低，但相对的燃料更加充足，于是很快会恢复，赫罗图上出现一个拐折。注意赫罗图上的长度与演化时间没有对应！

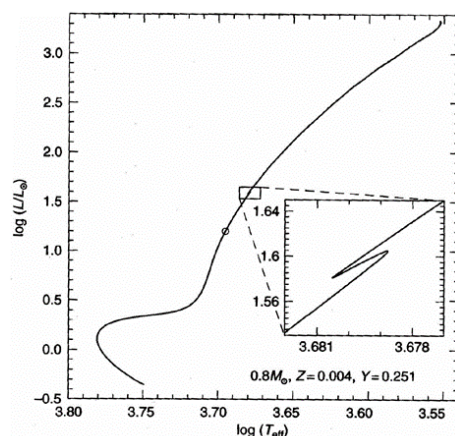


图 2.2: 拐折

此后继续沿林忠四郎线攀升。陡降是由于星风损失，包层膨胀很大，引力束缚减弱，表层光度较大，辐射压高以及一些温度梯度，会产生质量损失。

金属丰度对包层不透明度影响较大，不透明度主要由氢负离子贡献，而氢负离子的产生是因为活泼金属为其提供自由电子，金属丰度低，整体不透明度相对会低一些，反之则反之。金属丰度高，不透明度高，内部光更不容易出来，光深更大，光深等于 1 处更靠外，看到的是更外层的光子，有效温度更低。

2.6.4 核心氦：小质量

小质量恒星在简并状态下， $P \propto \rho^{5/3}$ ，EOS 和温度没什么关系，提高的温度不会反应在压强上，压强几乎不变，这意味着不会发生膨胀，不会外推， $dV = 0$ ，即不会做功，热量全部用于升高内能，氦被点燃，产能率迅速升高，中心光度增强，温度继续升高，没有压强的调节，发生正反馈，这是一个非常强烈而迅速的过程，峰值光度可达到 $10^{10} \sim 10^{11} L_{\odot}$ ，这就是“氦闪”。但不会看到光度突然增亮，因为被迅速膨胀的核心外层物质吸收，基本无法到达表面。之后进入稳定燃烧，氦核心部分简并。氦闪实际并不发生在正中心，因为中心中微子冷却较强，最剧烈处在稍靠外的 $0.1 M_{\odot}$ 壳层中。

在赫罗图上反应为 F 掉到 G 点位置，G 位置取决于质量与金属丰度，氦稳定燃烧到碳过程为“水平支”，这一阶段除了氦外还有相当部分的壳层氢燃烧

2.6.5 核心氦：中等质量

核心氦不简并。小部分被点燃，温度升高，压强增大，往外膨胀，有压强的调控，不会产生热核失控，比较平稳。这里也会产生一个紧贴着林忠四郎线的下行。因为同时还有壳层氢燃烧，核心氦燃烧，壳层氢被往外推，温度降低，壳层氢燃烧率下降，光度降低，包层仍是对流状态，由镜像法则，包层收缩，温度升高，因此贴着林忠四郎线下走。完全对流演化到辐射逐渐开始占主导，脱离林忠四郎线进入水平支，与 AB 段类似，由于平均分子量变大继续上行，达到 G 点表面温度最大值，恒星半径最小，形成 blue loop，此后又往红端演化，直至核心氦燃烧结束。碳的丰度先增后减，因为在红巨星支顶端，中心温度与密度足够高，量子隧穿效应变得有效，碳的 alpha 捕获反应开始部分转化为氧。blue loop 是一个动态过程，质量越大，loop 越明显，此外还有表面星风损失，相当于看到更热的部分，loop 左端越左。

随着因收缩引起核球温度的增加，在 CO 核球外部形成了一个厚厚的氢燃烧壳层。随着核球继续收缩，氢燃烧壳层变窄并变强，迫使壳层上方的物质膨胀并冷却。这导致氢燃烧壳层的暂时关闭。

随着氦耗尽的核球的收缩，中微子的产生增加到可以使核球稍微冷却的程度。中心密度增加和温度降低的后果是在 CO 核球中电子简并压成为总压强的重要组成部分。

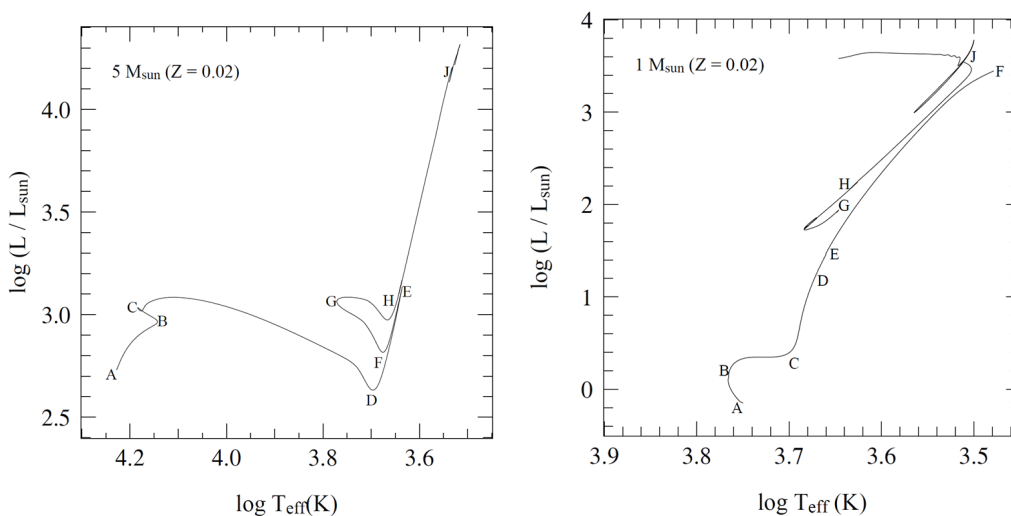


图 2.3: 中等、大质量恒星 (左) 小质量恒星 (右) 演化赫罗图

2.6.6 恒星脉动

在沿着水平支移动的过程中，许多恒星在它们的外包层中产生了不稳定性，导致周期性的脉动，这些脉动很容易被观测到，表现为光度、温度、半径和表面径向速度的变化。由于这些振荡敏感地依赖于恒星的内部结构，恒星脉动又为恒星结构理论提供了另一个检验。恒星脉动中最著名的莫过于造父变星（Cepheid Variable Star），有明显的周光关系，可当做一种标准烛光。那么我们如何去理解这一周光关系的起源呢？

从赫罗图上统计看，造父变星主要出现在 blue loop 段，处于氦燃烧阶段。恒星（质量 M ）在振动，分析其力学性质。取恒星表面薄层 m

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^2} + 4\pi R^2 P$$

做微扰展开

$$R = R_0 + \delta R, P = P_0 + \delta P$$

代入动力学方程并略去高阶小量，于是

$$m \frac{d^2 \delta R}{dt^2} = \frac{2GMm}{R_0^3} \delta R + 8\pi R_0 P_0 \delta R + 4\pi R_0^2 \delta P$$

假设脉动是绝热的，于是用半径替换掉绝热关系中密度，取对数求导有

$$\frac{\delta P}{P_0} = -3\gamma \frac{\delta R}{R_0} \Rightarrow (\delta \ddot{R}) = -(3\gamma - 4) \frac{GM}{R_0^3} \delta R \equiv -\omega^2 \delta R$$

而 ω^2 正负性由绝热指数决定，也即动力学稳定性由绝热指数决定。当为正时，于是有脉动周期

$$\Pi = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 (3\gamma - 4)}} \propto M^{-1/2} R^{3/2}$$

核心氦燃烧时，还有壳层氢燃烧，上面的推导是很粗糙的，只关心了最表面的部分，但它给我们一个理解的物理图景，恒星脉动与振动有关。进一步深入考虑 P, r, ρ 均扰动，且不局限于表层的模型（见黄润乾、李焱《恒星振动理论》p110）

$$P(m, t) = P_0(m) + P_1(m, t) = P_0(m)[1 + p(m)e^{i\omega t}]$$

$$r(m, t) = r_0(m) + r_1(m, t) = r_0(m)[1 + x(m)e^{i\omega t}]$$

$$\rho(m, t) = \rho_0(m) + \rho_1(m, t) = \rho_0(m)[1 + d(m)e^{i\omega t}]$$

考虑绝热脉动，再代入流体静力学方程和质量连续方程，得到

$$x'' + \left(\frac{4}{\tau_0} - \frac{\rho_0 g_0}{P_0} \right) x' + \frac{\rho_0}{\gamma_{\text{ad}} P_0} \left[\omega^2 + (4 - 3\gamma_{\text{ad}}) \frac{g_0}{\tau_0} \right] x = 0$$

且内外边界条件:

内: 为了保证 x 在中心处有限, 有

$$x' = 0, x = a_0 + a_1 r_0 + a_2 r_0^2 + \dots \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = \dots$$

外

$$4\pi R^2 P - \frac{GmM}{R^2} = 0$$

实际振动, 除中心外还会产生其他振动节点 (对应驻波模), 振动使得整个恒星的光度都发生变化, 这不应当只是一个微扰小量了, 振幅从小振幅放大, 能量从何而来? 一定有某种机制对它做功贡献能量实现放大。爱丁顿考虑了所谓的恒星热机。取恒星某一质量层, 整体上受到周围壳层的作用, 恒星膨胀时, 对外做功 $p dV$, 收缩时外界对其做功 $p dV$, 一个循环能量改变 $\oint p dV$ 。

若回来的时候压强较小从 P-V 图的下面回来, 因此环路积分为正, 因此获得能量 (Driving), 相反情况则相当于阻尼 (Damping)。要使得 driving 情况, 希望压缩时压强更大, 获得更多的热量。(对于任何热机来说, 恒星每一层在一个循环中所做的净功是流入气体的热量和离开气体的热量之差。对于驱动来说, 热量必须在循环的高温部分进入层, 在低温部分离开。就像汽车发动机的火花塞在压缩行程结束时点火一样, 脉动恒星的驱动层必须在其最大压缩期吸收热量。在这种情况下, 最大压力将发生在最大压缩之后, 振荡将被放大。) 有两种脉动驱动机制解释

ϵ -机制: 核燃烧区域在脉动阶段被压缩, 产生更多的能量; 在很大质量的位置中才显著 (与造父变星无关), 因为小质量恒星中最中心部分才为核反应区, 要使得整个恒星脉动是比较限制的

κ -机制: 如被压缩时不透明度上升, 则可以留住更多热量, 近似绝热

$$\left(\frac{d \ln \kappa}{d \ln P} \right)_{ad} = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P} \right)_T + \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_P \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{ad} = \kappa_p + \kappa_T \nabla_{ad} > 0$$

若采用 Kramers 不透明度, $\kappa_p \sim 1, \kappa_T \sim -4.5, \nabla_{ad} = 0.4$, 于是我们可以归纳 κ 机制的条件。对于 Kramers 透明度, 若 $\nabla_{ad} \leq 0.22$, 部分用于电离, 温度随压强变化没有那么敏感。另一方面, 若 $\kappa_T > 0$, 由氢负离子主导, 为较冷的恒星, 如大质量红巨星支, 如 Mira 变星

对于热恒星, 在往内推到相同温度层 (能够存在部分电离氢/氦) 时, 相比下更靠外, 质量层更小, 再怎么振动也无法在整个恒星 “掀起风浪”, 而往低温走, 内推可以推的很深, 密度很高, 粒子间碰撞频繁, 会远大于脉动的频率, 可近似认为是绝热的, 振幅不会被显著放大。故脉动变星温度集中在一个窄带上。

2.7 中心氦燃烧结束：中小质量恒星

对于中小质量恒星，CO 核心收缩，壳层 He 被点燃，包层膨胀，出现大范围对流，又会沿着林忠四郎线上升，称为渐进巨星支。

之前提到，在蓝循环，虽然核心氦被点燃，但相当部分光度来自于壳层氢。在渐进巨星支开始时，会出现壳层氢和壳层氦的双壳层燃烧，符合双镜像法则，即中心收缩，He 壳层为镜面，He、H 中间部分膨胀，相对 H 镜面外又收缩。燃烧氢壳层被外推，温度下降，壳层氢逐渐熄灭，又转为单镜像，包层温度降低，不透明度增加，对流继续增强，碰到燃烧 He 壳层，发生第二次挖掘。对于质量更小恒星壳层 H 保持燃烧，阻止对流深入，不会发生挖掘。

2.7.1 热脉冲

随着 He 的燃烧，里面的氦先耗尽变为 CO，CO 核心质量增大，缓慢向外扩展，到 He、H 边界无法继续，He 厚度越来越薄，光度减小，不敌引力，包层收缩，重新点燃壳层 H，这时与刚开始燃烧情况不一样，由于 He 为薄层，会发生不稳定燃烧，会发生壳层氦闪的现象，释放巨大的能量，将周围物质外推，膨胀温度又降低，H 又熄灭，又开始收缩，薄 He 聚集，壳层 H 重新点燃，又发生氦闪……如此往复，形成间歇性热脉冲。H 熄灭时，此时物质混合的对流可以十分深入，核心物质被带到表面，表面 CO 丰度提升，即第三次挖掘。

热脉冲的动能外推，外层温度较低，尘埃在恒星外层大气形成，如硅酸盐等，尘埃截面比较大，对光的吸收很强，收到辐射压较强，星风损失比较严重， $10^{-7} \sim 10^{-4} M_{\odot}/yr$ 。在氢氦交界处与外层氢包层，氢与碳 12 产生碳 13，产生很多中子，通过慢中子捕获过程，发生重元素合成。

中心形成碳氧核，逐渐简并。对中小质量恒星，无法触发碳闪，中等质量星风损失严重，碳氧核无法成长到触发的临界，小质量恒星物质本身较少，达不到碳氧点火温度。

2.7.2 薄层不稳定性

那么，为什么氦薄层会发生不稳定性呢？所谓的薄壳层，满足 $r - r_0 \ll R$ ，薄层质量 $\Delta m = 4\pi r_0^2 \rho d$ ，现赋予微扰，薄层内产能率增加，推动薄层膨胀， d 变大，薄层厚度增加约等于外半径的增加，有

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta d}{d} = -\frac{\delta r}{r} \frac{r}{d}$$

而同调关系

$$\frac{\delta P}{P} = -4 \frac{\delta r}{r}$$

得到

$$\frac{\delta P}{P} = 4 \frac{d}{r} \frac{\delta \rho}{\rho} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{\chi_T} (4 \frac{d}{r} - \chi_\rho) \frac{\delta \rho}{\rho}$$

最后一步用到 $P = \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T}$ 。要保证稳定性，膨胀 ρ 减小，若系数大于零，产能率低，压强就会减小，壳层又会缩回来。即要求

$$4 \frac{d}{r} > \chi_\rho$$

反之则不稳定

2.7.3 行星状星云

围绕白矮星前身星的膨胀气体壳层称为行星状星云。随着外部物质被星风吹走，内部热区逐渐暴露，被我们能观测到（有效温度），在 HR 图上左移。行星状星云的外观归功于气体的激发、紧聚的恒星发出的紫外线。紫外光子被星云中的气体吸收，导致原子被激发或电离。当电子返回到较低的能级时，光子被发射出来，其波长在电磁谱的可见部分。因此，星云看起来是可见光波段发光，产生许多美丽的发射线，对发射线光谱分析可以推断元素组成。

2.8 氦燃烧结束：大质量恒星

非简并 CO 核，会平稳点燃碳，存在辐射压驱动的强烈星风，星风质量损失率 \dot{M} ，向外损失动量由光度转化 $\dot{M}v = L_c$ 。内部也存在一定不稳定性，有由脉动与辐射压共同驱动的红超巨星阶段。

Wolf-Rayet 星具有强烈、甚至光学厚的星风，光子多次散射，质量损失超过单次散射极限。

大质量恒星 HR 图上大范围左右移动（蓝循环移动广），靠右红超巨星，靠左蓝超巨星

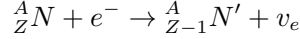
2.8.1 碳及更重元素燃烧

温度较高时，中微子会有概率替换为正负电子对，替换概率与温度正相关。当 $T > 5e8K$ ，中微子损失严重。将加速核心演化，核演化非常快，由于力学信息只能以声速传播，外层来不及建立平衡响应，外层几乎悬浮在正在灾难性坍缩的核球上。

对于 8-11 太阳质量恒星，CO 核部分简并，核心周围（中心中微子冷却）出现温和的碳闪，形成简并 O-Ne 核，最终质量大于 Chandrasekhar 极限则坍缩产生超新星爆发，否则形成 O-Ne 白矮星。若质量大于 11 太阳质量，O, Ne 燃烧形成 Si, S 再形成 Ni, Fe

2.8.2 核坍缩超新星

核心中微子发射强，带走能量，具有冷却效应，没有压强对抗引力，部分简并（电子简并）铁核收缩，此时中心密度很高达到相对论性，绝热指数 $\frac{4}{3}$ ，易发生不稳定性。中心还会发生一些弱相互作用，如逆 β 衰变



这是一种中子化过程，将质子转化为中子，并产生中微子，减小压强且整体分子量增加，钱德拉塞卡极限质量（简并压可支撑的极限质量）降低，坍缩变得更容易。且光子能量高，会将铁核打碎发生光致裂解，吸热反应，减小压强，响应显著性降低，进一步降低绝热指数。

综合，核心迅速坍缩， $\tau_{dyn} \sim 10\text{ms}$ ，直至达到核密度 10^{14}g/cm^3 ，中子简并，中子简并压将起作用，压强增高，发生核心反弹，将压强波向外送入来自核的下落物质中，当压强波速度达到声速时，产生激波。在激波下方，有光致解离和电子俘获过程产生的大量的中微子，散射（散射截面 $\sim 10^{-45}$ ，迅速坍缩密度下，平均自由程 $\sim 10^{11}\text{cm}$ ），中微子变得不透明的，可以与物质发生作用，发生激波下游中微子自由质子的电子捕获。理论计算得到中微子几乎带走 99% 的能量，在坍缩过程中起到重要作用。铁核的灾难性坍缩、激波的产生以及随后恒星包层的抛射，这种形成机制一般是 II 型超新星。

2.8.3 白矮星吸积伴星物质

白矮星通过洛希瓣吸积从伴星获取物质时，表面引力势能将吸积物质压缩并加热，触发周期性新星爆发。大量吸积伴星物质，核心温度增加，但简并压仍占主导，热压强响应缺失，温度急剧上升，失控的热核燃烧，发生碳爆轰，为 Ia 型超新星

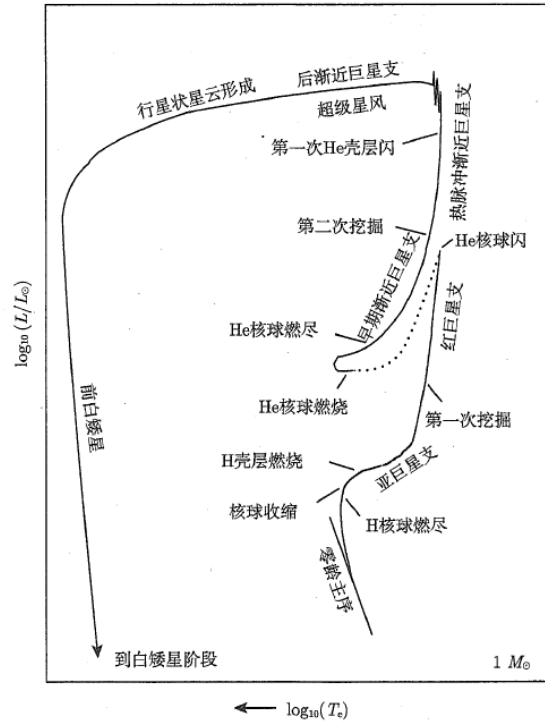


图 13.4 从零龄主序到白矮星形成 (见 16.1 节), $1 M_{\odot}$ 小质量恒星演化示意图。点状演化阶段代表氦闪之后的快速演化。演化的各个阶段标记如下: 零龄主序 (ZAMS)、亚巨星支 (SGB)、红巨星支 (RGB)、早期渐近巨星支 (E-AGB)、热脉冲渐近巨星支 (TP-AGB)、后渐近巨星支 (Post-AGB)、行星状星云形成 (PN 形成)、前白矮星和白矮星阶段

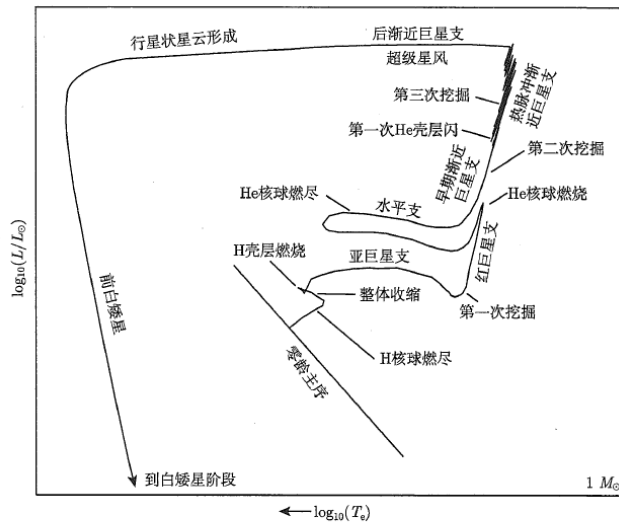


图 13.5 从零龄主序到白矮星形成, $5 M_{\odot}$ 中等质量恒星的演化示意图 (见 16.1 节)。根据图 13.4, 该示意图做了标记, 还添加了水平支 (HB)

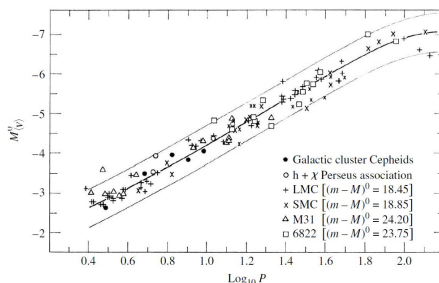
图 2.4: 从 Bradley 书上抄了很清晰的几张图

2.9 习题

1. 假设核燃烧单位质量的有效产能率为 $\epsilon_{eff} = \epsilon_0 \rho T^\nu$ ，且恒星整体具有均匀的平均分子量与不透明度，考虑恒星处于热平衡与流体静力学平衡，辐射主导能量输运，恒星内部气体可以用理想气体近似，利用同调关系，证明（课堂未推导部分）

$$R \propto \mu^{(v-4)/(v+3)} M^{(v-1)/(v+3)} \rho_c \propto \mu^{3(4-v)/(v+3)} M^{2(3-v)/(v+3)} T_c \propto \mu^{7/(v+3)} M^{4/(v+3)}$$

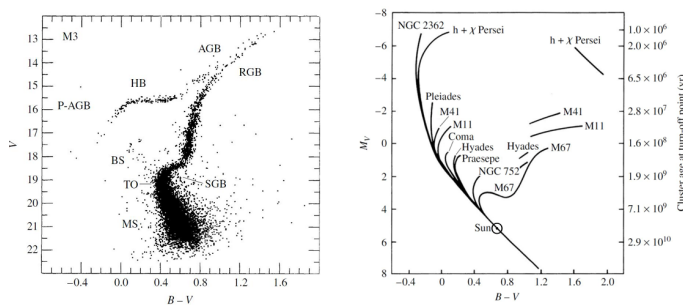
2. 测量到造父变星的周光关系如下图所示：中间黑色实线是对周期和绝对星等（可换算为光度）关系的最佳拟合结果，上下两条灰色实线代表拟合的误差范围（即不确定度），根据图片可读出不确定度约为 $\Delta M_v = 0.5$ 。如果应用拟合出的周光关系推算某一颗新测量到的造父变星的距离 d ，推算结果的不确定性 $(\Delta d/d)$ 大概是多少？



3. 左图为星团 M3 的 HR 图，横坐标为色指数（等价于恒星的表面温度），纵坐标为 V 波段视星等；右图为一一些星团的恒星在 HR 图上的示意，纵坐标为 V 波段绝对星等。

(1) 根据这两幅图估算 M3 到我们的距离

(2) $M = 0.8M_\odot$ 的恒星色指数大概为 0.9，结合右图思考为什么课堂上不讨论质量小于 $0.8M_\odot$ 恒星的后续演化。



Part1 LOG

250331 ver1→250401 修正了许多公式错位及错别字、语句不顺 ver2