

实测天体物理 B: 射电

御条当琴

2024 年 12 月 25 日

注: notes 基于邱科平老师上课讲解、Thomas Wilson. Tools of Radio Astronomy
以及课程课件整理而成

目录

1 射电天文基础知识	5
1.1 辐射强度与流量密度	5
1.1.1 亮度 I_ν	5
1.1.2 I_ν 的不变性	5
1.1.3 流量密度 F_ν	6
1.2 黑体亮度	6
1.3 亮温度与辐射转移	6
1.3.1 亮温度	6
1.3.2 激发温度	6
1.3.3 辐射转移	7
1.4 亮温度与激发温度	7
1.4.1 脉泽与黑体	8
1.5 天线温度	8
1.5.1 波束填充因子 beam filling factor	9
1.5.2 T_A 与 T_B 的关系	9
1.6 “温度”	9
1.7 均方根噪声 T_{rms}	10
1.8 射电望远镜信号接收系统	10
1.8.1 信号放大 Amplify	11
1.8.2 混频 Mixers	11
1.9 课后习题	12
2 单天线望远镜	13
2.1 早期主焦式望远镜	13
2.2 多反射面系统	13

目录	3
2.3 偏焦系统	13
2.4 望远镜 MOUNT	13
2.4.1 赤道式 Equatorial/Polar	13
2.4.2 水平式 Alt-Az	14
2.5 全部/部分 mesh 主面	14
2.6 馈源 feed 与波束	14
2.6.1 互易定理 (射电天文工具 109)	14
2.6.2 天线功率方向图	16
2.6.3 副面与支架对 beam 的影响	19
2.6.4 主反射面表面精度的影响	20
2.6.5 波束效率与孔径效率	20
2.6.6 天线公式	20
2.6.7 天线方向增益与方向系数	20
2.7 单天线望远镜实测	21
2.7.1 定标 $T_A : P_\nu \rightarrow T_A?$	21
2.7.2 cm 波观测定标例	21
2.7.3 口径效率	22
2.7.4 主波束效率	23
2.7.5 从实测到研究的逻辑顺序	23
2.7.6 信噪比	24
2.8 单天线望远镜谱线观测	24
2.8.1 多普勒改正	24
2.8.2 观测设计	24
2.8.3 观测模式: 较差式	25
2.8.4 位置调制模式 position switching	25
2.8.5 目标源贡献天线温度 T_{source}	26
2.9 谱线观测数据的基本处理	27
2.9.1 基线拟合 baseline fitting	27
2.9.2 平滑化 Smoothing	27
2.9.3 Spectral-Line Mapping	27
2.10 课后习题	28
3 干涉阵	29
3.1 干涉基本原理	29

3.1.1	灵敏度	29
3.1.2	频谱分析	29
3.1.3	空间频率	30
3.2	二元干涉仪	30
3.3	可视度函数的处理	31
3.4	uv 覆盖 uv coverage	33
3.4.1	从 uv 采样看干涉特性	34
3.4.2	Array configuration	35
3.5	洁净成图 cleaned map	36
3.5.1	干涉仪成图	36
3.5.2	洁化	36
3.6	干涉仪实测	37
3.6.1	基本逻辑	37
3.6.2	数据校准	37
3.6.3	通道校准 bandpass	38
3.6.4	灵敏度	38
3.6.5	增益校准	38
3.6.6	绝对流量定标 flux calibration	39
3.7	特殊的射电干涉阵	39
3.7.1	VLBI	39
3.7.2	单天线 + 干涉仪 Filling the zero spacings	40
3.8	课后习题	40
4	部分习题提示与参考答案	42

Chapter 1

射电天文基础知识

1.1 辐射强度与流量密度

1.1.1 亮度 I_ν

定义天体上 p 点在时间 t , 方向 \vec{l} 的射电辐射强度 $I_\nu(p, \vec{l}, t)$, 取过 p 点法线方向 \vec{n} 的一个辐射小面元 dA , $\langle \vec{n}, \vec{l} \rangle = \theta$, 再以 \vec{l} 为轴线作一立体角元 $d\Omega$, 面元 dA 发出落在 $d\Omega$ 内在频率 $\nu - \nu + d\nu$ 间发射的功率

$$dW(\vec{p}, \vec{l}, \nu, t) = I_\nu(\vec{p}, \vec{l}, t) \cos \theta dA d\Omega d\nu$$

1.1.2 I_ν 的不变性

在中间无介质吸收和辐射体相对观测者静止的情况下, 按能量守恒定律

$$I'_\nu \cos \theta' dA' d\Omega' = I_\nu \cos \theta dA d\Omega$$

且

$$d\Omega = \frac{dA' \cos \theta'}{R^2}$$

$$d\Omega' = \frac{dA \cos \theta}{R^2}$$

得到

$$I_\nu = I'_\nu$$

1.1.3 流量密度 F_ν

对于观测者来说, 注重的不是总辐射流而是观测到的流量密度

$$F_\nu = \int I_\nu d\Omega$$

1.2 黑体亮度

普朗克函数

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

总亮度

$$B(T) = \int B(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$$

Rayleigh-Jeans Limit

$$h\nu \ll kT, B(\nu, T) \sim \frac{2\nu^2 kT}{c^2} = \frac{2kT}{\lambda^2}$$

Wien Limit

$$h\nu \gg kT, B(\nu, T) \sim \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

1.3 亮温度与辐射转移

1.3.1 亮温度

用温度来表征辐射强度。若观测源为黑体辐射源, I_ν 对应于 $B_\nu(T)$, 射电上常 R-J 近似, 由此引入亮温度 T_B

$$I_\nu = \frac{2kT_B}{\lambda^2}$$

这是辐射本身的性质, 与观测设备和方法无关, 与天体运动学温度无关

1.3.2 激发温度

由 Boltzmann 分布有

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}{kT}} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{h\nu_{mn}}{kT}}$$

1.3.3 辐射转移

由能量守恒

$$dI_{\nu i} + dI_{\nu e} = -\alpha_{\nu} I_{\nu} ds + j_{\nu} ds$$

def:

$$S_{\nu} = \frac{j_{\nu}}{\alpha_{\nu}}, \quad \tau_{\nu} = \int \alpha_{\nu} ds$$

即有

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = -I_{\nu} + S_{\nu}$$

解得

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}) = I_{\nu}(0)e^{-\tau_{\nu}} + S_{\nu}(1 - e^{-\tau_{\nu}})$$

1.4 亮温度与激发温度

$$\alpha_{\nu} = \frac{h\nu}{4\pi}(n_1 B_{12} - n_2 B_{21})\phi(\nu), \quad j_{\nu} = \frac{h\nu}{4\pi}n_2 A_{21}\phi(\nu)$$

$$\Rightarrow S_{\nu} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$$

由量子力学可得 Einstein AB 系数关系（微扰论得到 B 系数，光的量子化得到 A 系数）

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}$$

又

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12}$$

$$\Rightarrow S_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}$$

激发温度

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{h\nu}{kT_{ex}}}$$

联立得到

$$S_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_{ex}}} - 1}, \quad \nu = \nu_2 - \nu_1$$

即是

$$\Rightarrow S_{\nu} = B_{\nu}(T_{ex})$$

代回辐射转移方程

$$\frac{2kT_B}{\lambda^2} = \frac{2kT_B(0)}{\lambda^2} e^{-\tau_\nu} + B_\nu(T_{ex})(1 - e^{-\tau_\nu})$$

采用长波近似

$$T_B = T_B(0)e^{-\tau_\nu} + T_{ex}(1 - e^{-\tau_\nu})$$

现在我们定性分析，我们将 τ 称为光深，当

$\tau \gg 1$ ，称为光学厚的， $T_B \sim T_{ex}$

$\tau \ll 1$ ，称为光学薄的， $T_B \sim \tau T_{ex}$ (for $T_0 = 0$)

1.4.1 脉泽与黑体

脉泽过程

一般情况下， $\frac{n_2}{g_2} < \frac{n_1}{g_1}$ ，这是正常的布居，某些特殊物理条件下，这个序关系反向，布居反转，此时 $\alpha_\nu < 0$ ，介质对辐射不断放大，即是脉泽过程

黑体辐射

当处于热动平衡，并光学厚时， $I_\nu = B_\nu(T)$ ，即黑体辐射

1.5 天线温度

根据 Nyquist 定理，热平衡条件下，一个电阻在单位频宽内提供噪声功率 P 只与温度有关，与电阻阻值无关，也与频率无关，

$$P = kT$$

这种噪声是电阻内电子热运动引起的 Johnson 噪声，是一种白噪声。

天体的射电辐射是一种高斯噪声，不是平谱白噪声，但这射电望远镜工作带宽或对信号测量频率间隔内，它的谱有与电阻热噪声相似的特性，因此可以用电阻的热噪声来表示天线的输出功率。设有一个射电天线，它观测一个射电源时，天线接收到的来自射电源的功率为 P ，定义该射电源的天线温度为

$$P = kT_A \Delta\nu$$

天线在一定立体角 Ω_A (近似大小 $\Omega_A \sim \theta^2 \sim \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2$) 内接受射电辐射，不考虑天线效率和大气影响，对应的流量密度

$$F_\nu = \frac{2kT_A}{\lambda^2} \Omega_A$$

1.5.1 波束填充因子 beam filling factor

1.5.2 T_A 与 T_B 的关系

天线温度是表示射电望远镜观测天体时功率输出的一个等效温度，亮温度是天体辐射强度的一种表示形式。天线温度既依赖于亮温度，又与观测条件和观测设备有关。定量严格关系由后续天线理论给出，定性的考察：设天体辐射均匀，亮温度 T_B ，天体尺度 Ω_s

$\Omega_s \ll \Omega_A$ 时

$$F_\nu^{obs} = \frac{2kT_A}{\lambda^2} \Omega_A = \frac{2kT_B}{\lambda^2} \Omega_s$$

$$\Rightarrow T_A = T_B \frac{\Omega_s}{\Omega_A}$$

$\Omega_s \gg \Omega_A$ 时

$$F_\nu^{obs} = \frac{2kT_A}{\lambda^2} \Omega_A = \frac{2kT_B}{\lambda^2} \Omega_A$$

$$\Rightarrow T_A = T_B$$

一般情况下

$$T_A = T_B f \quad (f < 1)$$

1.6 “温度”

温度 T_{kin}

微观粒子无规则运动强度

亮温度 T_B

流量密度的描述

激发温度 T_{ex}

在局部热动平衡条件下，分子或原子的各个能级上的布居符合玻耳兹曼分布律时的温度

天线温度 T_A

射电望远镜观测天体时功率输出的等效温度，为观测量

系统温度 T_{sys} 与均方根噪声 T_{rms}

由望远镜硬件、大气等产生，一般情况下 $T_{sys} \gg T_A$. 均方根噪声反应天线温度的测量精度，衡量一次观测的噪声水平

1.7 均方根噪声 T_{rms}

$T_{sys} = \bar{T} \pm \sigma$, 从实测角度考虑随机起伏的噪声，在短时间内，其概率关于 \bar{T} 为最概然成高斯分布。测量 T_A 过程中，在一次实测过程开展中 T_{sys} 已是客观存在（可以挑天气好等），将 T_A 叠加上去，要求将 σ 降低至相对于 T_A 为小量（例如 $\sigma < \frac{T_A}{3}$ 已经较好， $\sigma < \frac{T_A}{5}$ 可以认为不可能）

那么如何降低 σ 呢？

T_{sys} 是白噪声，接受系统带宽为 $\Delta\nu$ (连续谱观测，即是长带宽；谱线观测，则带宽考虑合适的通道)，用有限带宽测量平谱白噪声产生“截断”的过程，由傅里叶变换，无限频率平坦的常数，在时域上应当是一个 δ 函数，当频域截断为方波 $\Delta\nu$ ，其变换到时域为 sinc 函数，其包络为 $\frac{1}{\Delta\nu}$ 。因此在时间间隔小于 $\frac{1}{\Delta\nu}$ 内采样不独立，在时间 t 内共有 $N = \frac{t}{\frac{1}{\Delta\nu}} = t\Delta\nu$ 次独立测量，测量误差 $\propto \frac{1}{\sqrt{N}}$

可以表征天线温度的测量精度如下，他衡量了一次观测的噪声水平。其中 $\Delta\nu$ 为带宽, t 为对着目标源的积分时间 (on-source time)

$$T_{rms} \sim \frac{T_{sys}}{\sqrt{t\Delta\nu}}$$

用 \sim 号是因为部分望远镜由于考虑偏振等前面会有一个系数

1.8 射电望远镜信号接收系统

外差式接收机 Heterodyne Receiver

厘米波段 HEMT, 毫米波段 SiS, 即前端, 对信号放大、混频, 再接后端或终端的频谱仪, 用于谱线观测。更高频: HEB mixer

热辐射计 Bolometer

毫米/亚毫米波段连续谱观测

1.8.1 信号放大 Amplify

LNA 低噪放

首次低噪放的重要性：在后续的电子设备添加噪声前放大信号。在放大微弱信号的场合，放大器自身的噪声对信号的干扰可能很严重，因此希望减小这种噪声，以提高输出的信噪比。前端中的低噪声放大器是整架接收机中的核心部件，一是因为接收机总的噪声主要来自低噪声放大器，另外一点是它有足够大的放大倍数，使从极化器来的信号放大到接收机其余部分能对该信号进行有效处理

1.8.2 混频 Mixers

两个输入，信号与本振 local oscillator

$$2 \sin(2\pi\nu_{LO}t) \times \sin(2\pi\nu_{RF}t) = \cos[2\pi(\nu_{LO} - \nu_{RF})t] - \cos[2\pi(\nu_{LO} + \nu_{RF})t]$$

IF 与 RF

把来自滤波器的射电频率（简称射频，英文为 Radio Frequency, 缩写为 RF）信号乘以本地振荡器的信号，产生一个容易处理的比射频低的信号，这个信号称中频（intermediate frequency）

$$e^{i2\pi\nu_{RF}t} e^{-i2\pi\nu_{LO}t} = e^{i2\pi(\nu_{RF}-\nu_{LO})t}$$

边带 Sideband

边带：调制后的信号，在中心载频的上下两侧各产生一个频带，称作边带。详细可参考信号与系统中的课件<https://www.lamda.nju.edu.cn/dsp2023/slides/07.pdf>

SSB single. 滤波

DSB double. 上边带和下边带都要，可以放在同一个框中，但不同谱线容易混在一起

2SB 边带分离

上边带（高于本振信号）下边带（低于本振信号）

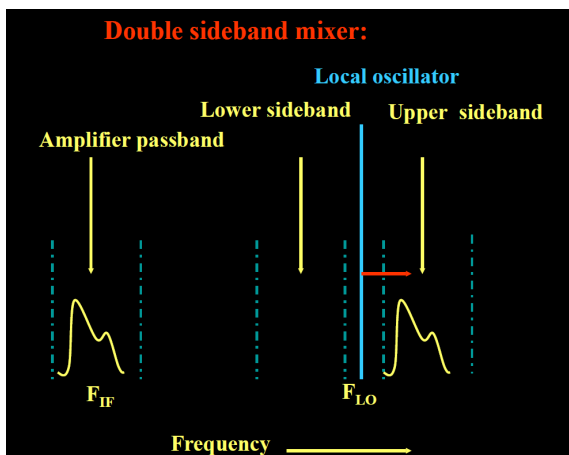


图 1.1: DSB

1.9 课后习题

- 1 计算一个温度为 3 K 的黑体在 6cm、6mm、1mm 波长处的亮温度。
- 2 一个直径为 1 角秒的均匀圆面天体，在波长为 1.3mm 处的流量密度为 1 Jy，计算其亮温度。
- 3 把太阳辐射近似为 5800 K 的黑体辐射，计算其在 5 GHz 处的流量密度；对于这样一颗恒星，离地球的距离为 1 pc（秒差距），其流量密度为多少？
- 4 一个点源的流量密度为 1 Jy，用一个口径为 10m、50m、100m、500m 的望远镜观测该点源，测到的天线温度分别为多少？

Chapter 2

单天线望远镜

2.1 早期主焦式望远镜

主焦式：接收机前端位于主焦点后

优点：光路简单，损耗低

缺点：限制了接收系统的发展，换接收机时间成本很高（如 FAST）

2.2 多反射面系统

和光学的没有什么区别

优点：可建立复杂的接受系统

缺点：光路损耗

2.3 偏焦系统

取部分抛物面偏焦，克服了多次反射驻波，副面和支架遮挡问题，但实现这种工程技术造价昂贵（如 Greenbank 110m）

2.4 望远镜 MOUNT

2.4.1 赤道式 Equatorial/Polar

易于跟踪，但支撑结构不稳

2.4.2 水平式 Alt-Az

支撑结构稳固，但跟踪计算复杂

2.5 全部/部分 mesh 主面

要求：网洞口径 $\ll \lambda$

优点：轻、易控制、造价低，显著减轻“风”扰动

缺点：表明精度低、效率低（特别对短波）

混合式的实面加网面，对低频来说是网面大小，高频来说是实面大小，是很平衡的设计

2.6 馈源 feed 与波束

通过反射面的电磁辐射经过馈源传给接受机系统，相当于耦合器件。

从光学望远镜角度，不考虑 seeing，在衍射极限下，天空平面一个点源在焦平面形成一个有一定分布的衍射斑，这是由衍射极限决定的 PSF。对射电来说，焦平面上接受信号的接收机“点”，一定是来自天空平面上一定范围的信号，是互易的过程。指向的最强，稍微偏一点能力较弱，就这样引入了波束的概念

2.6.1 互易定理（射电天文工具 109）

电磁学中有静电学的 Green 互易定理与电路中 Rayleigh 与 Helmholtz 阐述的互易定理，后者被 Carson 应用于天线问题

考虑两个天线 1,2，设 1 是由发电机 G 提供能源的发射天线，而 2 是接收天线，它引入某个电流，由测量仪 M 测量，接收天线处在 M 具有最大响应的方向，假设 2 中没有欧姆损耗

互易定理表述为：如果我们交换发电机 G 和测量仪 M，M 测得的电流保留同样的数值，所以用哪一个天线接受或者发射都无关紧要。证明陈述如下

高斯单位制下考虑 1,2 系统的 Maxwell 方程组

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}_1 &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_1 + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\vec{E}}_1, & \nabla \times \vec{H}_2 &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_2 + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\vec{E}}_2 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}_1, & \nabla \times \vec{E}_2 &= -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}_2\end{aligned}$$

构成

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) = \vec{H}_2 \cdot (\nabla \times \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\nabla \times \vec{H}_2) = -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}_1 \cdot \vec{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 - \frac{\varepsilon}{c} \vec{E}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_2$$

$$\nabla \cdot (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{H}_1 \cdot (\nabla \times \vec{E}_2) - \vec{E}_2 \cdot (\nabla \times \vec{H}_1) = -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}_2 \cdot \vec{H}_1 - \frac{4\pi}{c} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \frac{\varepsilon}{c} \vec{E}_2 \cdot \dot{\vec{E}}_1$$

两式相减

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \frac{\mu}{c} (\dot{\vec{H}}_2 \cdot \vec{H}_1 - \dot{\vec{H}}_1 \cdot \vec{H}_2) - \frac{4\pi}{c} (\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 - \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1) - \frac{\varepsilon}{c} (\vec{E}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_2 - \vec{E}_2 \cdot \dot{\vec{E}}_1)$$

考虑谐波

$$\dot{\vec{H}} = -i\omega \vec{H}, \quad \dot{\vec{E}} = -i\omega \vec{E}$$

容易得到等式右侧一、三项均为 0,

$$\nabla \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = -\frac{4\pi}{c} (\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 - \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1)$$

而等式左侧的散度的体积分, 由高斯定理, 若选取为无限大球, 在球表面电场磁场均相应趋于 0 (下降比 $\frac{1}{r^2}$ 快), 故得到

$$\int_V (\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 - \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1) dV = 0$$

现在, 如果两个天线包含在不同的区域 V_1, V_2 中因为在 V_2 中 $\vec{J}_1 = 0, V_1$ 中 $\vec{J}_2 = 0$, 有

$$\int_{V_2} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 dV_2 = \int_{V_1} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 dV_1$$

这里没有涉及两天线之间的关系。若一个天线含在一个截面为 a , 长度为 dl 的无穷小圆柱体中, $dV = a dl$, 天线的总电流是 $I = a |\vec{J}|$, 电压是 $U = E dl$, 故

$$U_2 I_1 = U_1 I_2$$

2.6.2 天线功率方向图

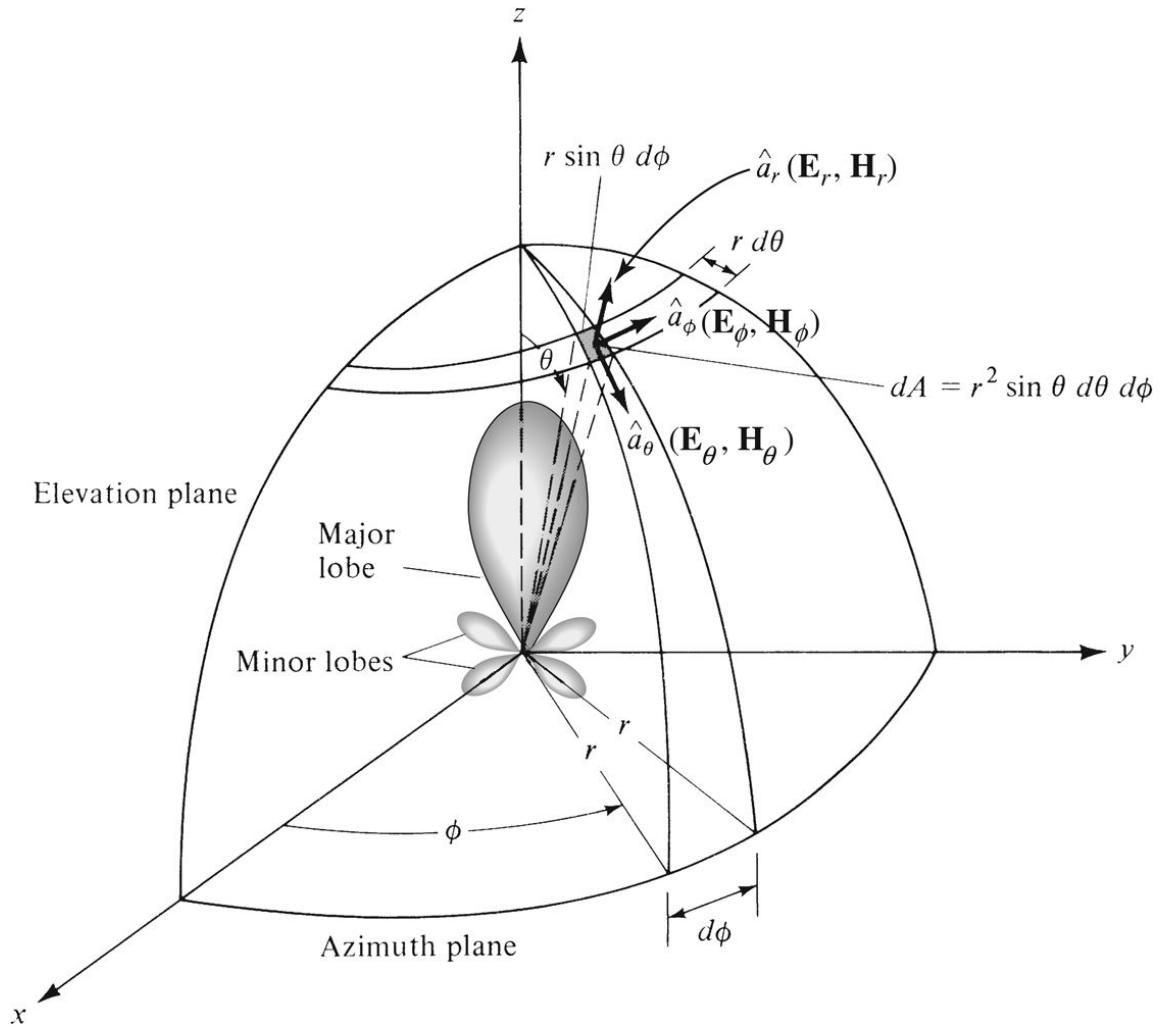


图 2.1: 辐射图

考虑天线为一个“发射系统”（互易定理：接受能力随方向分布与发射系统馈源相当于照明的能量发射的分布是一样的），由主馈源对天线提供照明：天线表面电流分布（均匀照明在发射面上产生感应的电流，产生一个场强 $E(x)$ ，一维分布为方波）与远场场强方向呈 Fourier 变换对，功率 $P(\theta, \phi) : \text{sinc}^2(\theta)$ ，关心它的相对分布，作归一化的功率

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P_{max}}$$

对全空间立体角积分

$$\iint_{4\pi} P_n(\theta, \phi) d\Omega = \Omega_A$$

对主瓣立体角积分

$$\iint_{mb} P_n(\theta, \phi) d\Omega = \Omega_{mb}$$

射电上均匀照明中心极大被称为主瓣 (main beam), 次极大称旁瓣, 主瓣 FWHM

$$\theta_{mb} = \frac{1.02\lambda}{D}$$

not $\frac{1.22\lambda}{D}$ which is BWFN/2

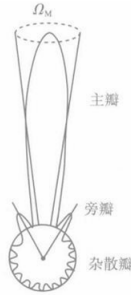


图 2.2: 主瓣、旁瓣、杂散瓣

严格推导

选择坐标系使孔径位于 $z' = 0$ 的有限区域, 假定这个孔径为波的常数相位面, 选择电流矢量单位矢使得 $\vec{J}_0 = (0, J_0, 0)$, $F(\vec{e}_n)$ 为电流元在 \vec{e}_n 场强方向图 (对于赫兹偶极子, 它是 $\sin \theta, \theta$ 为 \vec{e}_n 与 \vec{J}_0 夹角), 有

$$dE_y = -\frac{i}{2}\lambda J_0 g(\vec{x}') \frac{F(\vec{e}_n)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i(\omega t - k|\vec{x} - \vec{x}'|)} \frac{dx'}{\lambda} \frac{dy'}{\lambda}$$

作远场近似 $r \gg |\vec{e}_n \cdot \vec{x}'|$ (除了指数项) 并积分后有

$$E_y = -\frac{i}{2}\lambda J_0 \frac{F(\vec{e}_n)}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \iint g(\vec{x}') e^{-ik\vec{e}_n \cdot \vec{x}'} \frac{dx'}{\lambda} \frac{dy'}{\lambda} := -i\lambda\pi J_0 \frac{F(\vec{e}_n)}{r} f(\vec{e}_n) e^{-i(\omega t - kr)}$$

对于圆形孔径, 使用极坐标, 假设孔径由 $\rho \leq \frac{D}{2}$ 定义, 电流分布只依赖于 ρ, u 为 \vec{e}_n 与主瓣方向夹角的正弦, 由于电流的孔径分布 $g(\vec{x})$ 与远场方向图 $f(\vec{e}_n)$ 是傅里叶变换对

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty g(\rho) e^{-i2\pi u \rho \cos \phi} \rho d\rho d\phi = \int_0^\infty g(\rho) J_0(2\pi u \rho) \rho d\rho$$

于是我们知道，圆对称情况下电场磁场的强度就是电流分布的 Hankel 变换, 且 $J_0(0) = 1$, 可得到归一化的功率方向图

$$P_n(u) = \left[\frac{\int_0^\infty g(\rho) J_0(2\pi u \rho) \rho d\rho}{\int_0^\infty g(\rho) \rho d\rho} \right]^2$$

而均匀照射的圆形孔径,

$$g(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \leq \frac{D}{2\lambda} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

于是

$$P_n(u) = \left[\frac{2\lambda}{\pi u D} \int_0^{\frac{\pi u D}{\lambda}} J_0(z) z dz \right]^2$$

由 Bessel 函数递推

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z)$$

则

$$P_n(u) = \left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi u D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi u D}{\lambda}} \right]^2$$

如果天线的主瓣区域包括 $P_n(u)$ 直到位于

$$\frac{\pi u D}{\lambda} = 3.83171$$

的第一零点, 那么则第一零点之间的射束宽度

$$\text{BWFN} = 2.439 \frac{\lambda}{D}$$

半功率全宽 (归一化功率方向图下降到最大值的一半的主瓣两点间的角距离, 且半功率宗量解为 1.6163399483107, 误差 $\sim e-16$)

$$\text{FWHP} = 1.02 \frac{\lambda}{D}$$

附解方程示例代码

```
import numpy as np
```

```
import math as m
```

```

from scipy.special import jv
from scipy.optimize import fsolve

def equation(x):
    return jv(1, x) / x - np.sqrt(2) / 4

# 选择初始猜测值
initial_guesses = [1.5, 5, 10] # 可试多个初始值找多个解
solutions = [fsolve(equation, guess)[0] for guess in initial_guesses]

print(" 方程 J_1(x)/x = sqrt(2)/4 的解:")

for sol in solutions:
    print(sol)
    print(sol/m.pi*2)
    print("\n")

```

#p.s. 实际好几个方法算的不知道为什么都是 1.03...

非均匀照明时，有许多中心强旁边弱的照明。有时会出现主瓣所对源很弱，尽管旁瓣能力较弱但对着方向有强源，就会发生严重的信号污染，所采集到的信号不一定是所期望的结果，可采取逐步衰减的分级照明，一定程度上减弱旁瓣水平，但在同时增加主瓣宽度等效于牺牲一定空间分辨率，同时降低孔径效率；可应用于观测弱展源的低噪声天线。一般主瓣的 FWHM 范围： $1.05 \sim 1.2 \frac{\lambda}{D}$ 。

实际上并没有给定馈源照明设计与波束的 File，实际望远镜的波束理解来自实际观测 $\frac{\Omega_{mb}}{\Omega_A}$ ，而且波束会因望远镜俯仰的机械结构微小改变或其他状态改变而改变，需要定期测量去了解波束分布以及效率。

2.6.3 副面与支架对 beam 的影响

无穷远来的辐射，要到主反射面接受，但副面、支架的存在形成遮挡，所谓遮挡影响的实际是波束。对副面、两根十字支架作傅里叶变换对原束叠加，让波束有缺陷，没有原来那么尖锐

2.6.4 主反射面表面精度的影响

从互易的角度看，完美精度下是严格理想化的平面波发射。精度一定存在缺陷，波前将不再完美，主极大处效率将降低，角度偏的地方反而上升

2.6.5 波束效率与孔径效率

主波束与全空间之比

$$\eta_{mb} = \frac{\Omega_{mb}}{\Omega_A}$$

有效接受面积与几何接受面积之比

$$\eta_{eff} = \frac{A_{eff}}{A_g}$$

2.6.6 天线公式

从量纲上看 $\Omega_A \sim (\frac{\lambda}{D})^2$, $\Omega_A \sim D^2$

严格推导较为复杂，选一个特殊情况来看上看，考虑天线。接受机全部封闭在温度 T 的黑体中，整个系统处于热力学平衡且 Rayleigh-Jeans approximation 适用

接受到流量密度等于整个波束与辐射强度之积，要求功率再乘有效的接受面积，一般天线系统都是某个方向的偏振，单位频率功率

$$\frac{W_{obs}}{\Delta\nu} = \frac{2kT}{\lambda^2} \Omega_A A_{eff}$$

天线输出所接匹配电阻达到平衡，输出 kT (Nyquist 定理)

$$\frac{W_{out}}{\Delta\nu} = kT$$

由细致平衡原理，即得到

$$\Omega_A A_{eff} = \lambda^2$$

also(二分之一来自于取一半偏振)

$$P_\nu = kT_A = \frac{1}{2} F_\nu A_{eff} = \frac{1}{2} \frac{2kT_A}{\lambda^2} \Omega_A A_{eff}$$

2.6.7 天线方向增益与方向系数

def

$$P = \iint \frac{1}{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega$$

增益

$$G(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P}$$

方向系数

$$D = G_{max} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

2.7 单天线望远镜实测

2.7.1 定标 $T_A : P_\nu \rightarrow T_A$?

无线电通讯

用已知功率输出的发射器定标待测天线，要求

$$d > \frac{2D^2}{\lambda}$$

射电天文 $d > 10^3 km$

热辐射计定标：测量大气辐射，确定大气不透明度，测量目标源附近已知流量源，再测量目标源

接收机观测通常利用目标源、天空背景和热载荷（更精确定标可加入一个冷载荷）等之间的切换式观测（例如：chopper）来定标

通过观测行星或月面确定主波束效率、宽度

通过观测标准天体源确定有效面积和口径效率

2.7.2 cm 波观测定标例

Step1 counts 定标 $\rightarrow T_A$

由于

$$T_A = \frac{P_\nu}{k}$$

1K 天线温度相应 $1.38 \times 10^{-23} W \cdot Hz^{-1}$ 利用放入载荷 (loads) 贡献天线温度 T_{cal} (这是已知量!)，用噪声电子管很方便

每间隔零点五秒进行一次测量，calibrator(指载荷、天上定标源) 放入接收系统称 on，移出称 off，接受的信号 signal 表征计数 counts，四次计数贡献

$$sig = Ph1 + Ph2 + Ph3 + Ph4 = 4 \cdot Sky + 2 \cdot Cal$$

参考值

$$\begin{aligned} ref &= -Ph1 - Ph2 + Ph3 + Ph4 = 2 \cdot Cal \\ \Rightarrow T_A &= T_{cal} \frac{sig - ref}{2\langle red \rangle} = T_{cal} \frac{Sky}{Cal} \end{aligned}$$

这是对着天空观测得到的天线温度。这与我们想要的来自目标源的天线温度仍有差距，没进行大气改正，实际上得到的是 T_{sys} 。

Step 2 大气修正 $T_A \rightarrow T_A^*$

频率很低时几乎不需要进行大气改正，天顶不透明度 τ (Zenith Opacity) 在低频时很小，但在厘米波段，达水的特征谱线，就会发生急剧吸收产生一个峰

$$T_A = T_A^* e^{-\tau}$$

而 τ 除了与频率有关，还需要考虑俯仰，用 Radio meter 可直接测得，还可以用平行层大气描述，类似大气本身激发温度去估计（湿度，俯仰 Elv 等）

$$T_{sys} = T_{rec} + T_{CMB} + T_{spill} + T_{atm}(1 - e^{-\tau \cdot AM}) \sim T_0 + T_{atm} \tau \cdot AM$$

其中 $AM = \frac{1}{\sin(Elv)}$ 为 Airmass，表征俯仰角， $\tau \cdot AM$ 即实际穿过大气，拟合

$$T_{sys} = \underbrace{k \cdot AM}_{\text{受俯仰影响}} + \underbrace{b}_{\text{不受俯仰影响}}$$

Step 3 Gain-Elevation 俯仰改正 $T_A^* \rightarrow T_A^{**}$

上一步的俯仰修正实际是穿过大气厚度问题，本步所考虑的是真正望远镜自身的俯仰特性问题修正

$$T^{**} = \frac{T_A^*}{G(Elv)}$$

2.7.3 口径效率

口径效率

$$\eta_{eff} = \eta_{block} \cdot \eta_{taper} \cdot \eta_{spill} \cdot \eta_{surf}$$

副面、接收机、支架等遮挡 block

中心到边上的形变，天线孔径场分布一般总是中央比较高边缘比较小 taper

馈源的功率方向图总有一部分在反射天线的外面 spill

表面精度 surf

$$\eta_{surf} = e^{-\left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda}\right)^2}$$

由此得到流量密度

$$S_\nu = \frac{2kT_A^{**}}{\lambda^2} \Omega_A = \frac{2kT_A^{**}}{A_{eff}} = \frac{8kT_A^{**}}{\pi D^2 \eta_{eff}}$$

有效面积可利用标准源定出。由于波束概念，标准源应为点源，若他不是点源，卷积过程，流量全部进来不能被保证。系数用 $\Gamma(K/Jy)$ 表示，于是

$$T_A = S\Gamma$$

2.7.4 主波束效率

def

$$T_{mb}\Omega_{mb} = T_A^{**}\Omega_A \Leftrightarrow T_{mb}\eta_{mb} = T_A^{**}$$

那么如何定出主波束密度。两个高斯函数卷积后仍为高斯函数，目标源半高全宽 θ_s ，望远镜主波束半高全宽 θ_{mb} ，扫描成谱（主波束投影到无穷远天空平面得到颜色斑）相应半高全宽 $\sqrt{\theta_s^2 + \theta_{mb}^2}$

目标源选为已知标准面源（介于点源与展源之间，保证卷积效果，如行星、卫星，如果用点源， $\theta_s \rightarrow 0$ ，尽管 θ_s 可以导出，但由于波束填充因子趋近于 0，效率无从得知），半高全宽和峰值亮温度均已知，mapping 成图后观测量既知，可反推出 θ_{mb} ，也可以求出 T_{mb}

$$T_B\theta_s^2 = T_{mb}(\theta_s^2 + \theta_{mb}^2)$$

定义波束填充因子

$$f_{fill} = \frac{\theta_s^2}{\theta_s^2 + \theta_{mb}^2}$$

则

$$T_{mb} = T_B f_{fill}$$

主波束效率也相应得到

$$\eta_{mb} = \frac{T_A^{**}}{T_{mb}}$$

⇒ 观测点源，口径效率重要；观察展源，主波束效率重要

2.7.5 从实测到研究的逻辑顺序

从实测观察并修正得到 T_A^{**} ，若点源，得到流量密度 S_ν ，若展源或有一定结构， η_{mb} 算出 T_{mb} ， f_{fill} 推知其亮温度（主波束上的平均），通过辐射转移、数值模拟、多波段观测等得到激发温度 T_{ex} 和动力学温度 T_{kin}

2.7.6 信噪比

$$SNR = \frac{T_A^{*(*)}}{T_{rms}}$$

对点源

$$T_A^{**} = S\Gamma, \Gamma = \frac{\pi D^2}{8k} \eta_{eff}$$

对展源

$$T_A^{**} = T_{mb} \eta_{mb} = T_B f_{fill} \eta_{mb} = T_B \eta_{mb} (\text{展源 } f_{fill} = 1)$$

2.8 单天线望远镜谱线观测

2.8.1 多普勒改正

速度与频率的互换，利用参考频率与观测频率

$$v = c \frac{\nu_{ref} - \nu_{obs}}{\nu_{ref}}$$

但观测频率是被改变的频率，主要需要考虑观测系统、太阳系等的运动（天体自行一般不作改正，因为这一般是我们的研究对象）

一般的改正有：地球自转、地心相对太阳系质心运动、局域静止参考系、银心参考系

2.8.2 观测设计

pointing, focus, η_{mb}

ref.position, ref.spectrum

correction for elevation effect

其中指向：天体物理中，问题关键不在坐标，更重要的是波束的指向偏离直接影响观测，需要做偏差的 offset 模型

2.8.3 观测模式：较差式

谱线辐射只占总接受功率的一小部分，叠加在宽带噪声信号上（包括系统噪声和真实连续谱信号）当 $T_{sys} \gg T_A$ ，若由于其他原因产生一个起伏，信号容易被淹没

$$W = (T_{sys} + T_A)g$$

$$if (T_{sys} + T_A)(g + \Delta g) = (T_{sys} + T_A + \Delta T)g$$

$$\Delta T = (T_{sys} + T_A) \frac{\Delta g}{g}$$

若较差式观测 ON-OFF, OFF 即 $\bar{T}_{sys} \pm \sigma$, ON 即 $(\bar{T}_{sys} \pm \sigma) + (\bar{T}_A \pm \sigma')$

$$\Delta W = (T_{sys} + T_A - T_{sys})g$$

$$if (T_A)(g + \Delta g) = (T_{sys} + T_A + \Delta T)g$$

$$\Delta T = T_A \frac{\Delta g}{g}$$

此时 T_A 不会被淹没。实现方式有

2.8.4 位置调制模式 position switching

单波束，在观测目标源一段时间（ON）后，对一个干净背景观测（OFF）相同时间。技术简单，微弱源或点源效果非常好，但需要在目标源附近找到干净背景（例如目标信号非常弥漫到处都有就不好处理，如宇宙微波背景辐射，21cm 谱线），指向变化较大，耗时较长，系统包括大气必须在切换周期内非常稳定

3K 背景辐射的发现，把 T_{sys} 所有贡献全去除，总留下一个 3K 的东西

波束切换模式 beam switching

使用双波束，一个对着目标源一个对着天空背景，同时得到 ON 与 OFF，周期性切换，再做平均。效率高，源始终在一个波束中。不用摆动天线，切换较快，减少大气变化影响，得到好的谱线基线。但需要双接收机，OFF 点选择受限

与像素概念不同，波束与波束间 $\Delta\theta > (3)\theta_{mb}$ ，若波束与波束间靠的很近，一级旁瓣甚至进入另一波束主瓣，观测会出现问题，因为不知道波束所接受到的信号功率来自哪里，各波束观测不再独立。

wobbler

单波束移动副面从而移动波束，动的范围较小但动的很快，适宜弱点源观测，旁边就有干净背景

频率调制模式 frequency switching

很难找到一个没有信号的天空区域作为背景（如 HI 21cm 谱线），这时候可在频率上找到“干净背景”——微调观测频率（调 LO）到没有谱线处，作为 OFF 点，不需要移动望远镜任何部位。要求对待测谱线有足够了解，系统在频率通道间必须足够稳定，对超宽线不适用

飞行模式 On-the-fly

用来成图。不只是跟踪天上某一个位置，而是在一定区域内扫描并快速计数，使得在读数时间内，望远镜指向区域基本还是一个波束大小。扫描目标区域一段时间后，在附近一个 OFF 点进行观测，然后按照需要将原始数据重新采样，得到谱线成图数据

gridding: 分成若干的点考虑，点与点距离，相当于光学上后端探测器，应当满足 Nyquist 采样 ($\frac{\theta_{mb}}{2}$) 以保证不漏信息但注意与 Pixel 区分，Pixel 是直接光子数可加，而这里每个格点单位是 Jy/beam. 根据 $T_{rms} = \frac{T_{sys}}{\sqrt{\Delta\nu t}}$ 根据需要计算出每个点需要的有效积分时间，设定扫描速率。beam 在动，常常超 Nyquist 采样，划分更小，常 $\frac{\theta_{mb}}{3}$

另外有 drift scan(漂移扫描巡天). 望远镜不动，依靠地球自转相对运动去扫描天空，但选择性较差

2.8.5 目标源贡献天线温度 T_{source}

counts 的

$$\frac{ON - OFF}{OFF}$$

相应于

$$\frac{T_{source} + T_{sys} - T_{sys}}{T_{sys}}$$

即

$$T_{source} = T_{sys} \frac{ON - OFF}{OFF}$$

双载荷 Hot& Cold Loads 温度分别 T_{cold}, T_{hot} , 均为已知的天线温度, 要得到目标源贡献天线温度, 只需要定出 T_{sys}

引入 y 因子

$$y = \frac{T_1 + T_{off}}{T_2 + T_{off}} \Rightarrow T_{off} = \frac{T_1 - yT_2}{y - 1}$$

其中 T_{off} 即 T_{sys} , T_1 为冷热之一, 相应 T_2 即为反面, y 因子的获得实际上就先“冷空”计数, 再移出冷载荷放入热载荷, 两次做得的比值

$$\frac{counts(sky + hot)}{counts(sky + cold)}$$

2.9 谱线观测数据的基本处理

单天线得到的数据实际上是一条一条谱
处理的基本思想： $t \rightarrow n\Delta t$

2.9.1 基线拟合 baseline fitting

基线即它的背景，纵轴为某种强度（如天线温度）的标度，横轴为频率（可互换为速度）。信号峰的绝对值是不可信的，可信的是信号峰到基线的距离。但基线常“斜着向上”，应当将其移到零水准线上

如图，把信号挑出，选取三段噪声部分线性拟合（如最小二乘法），再减掉这条拟合线，即完成基线拟合。有时候数据不太良好，如驻波基线，来自于 off 离得太远、电磁波在望远镜系统中的多次发射等，基线起伏很复杂，一次拟合不再适合

2.9.2 平滑化 Smoothing

t 是需要望远镜实际观测的，但 $\Delta\nu$ 是可后动的，不改变科学分析情况下的增大通道宽度 channel（如改变通道数的合并通道 Boxcar，不改变通道数的类卷积的加权平均，邻近 channel 不再独立，权重为 Hanning/Gaussian 函数拟合的相应称为 Hanning/Gaussian）可以降低噪声大小

2.9.3 Spectral-Line Mapping

统计处理，零级矩信号分布（若光学薄的，柱密度分布，若无化学影响直接对应微观粒子分布，我们可以从中读出动力学信息等），把 data cube 在速度维上压扁成一个面，即是 M_0

$$M_0 = \int F_v dv$$

一阶矩相应速度平均

$$M_1 = \frac{\int F_v v dv}{M_0}$$

二阶矩相应速度弥散平均（热辐射由温度产生，非热成分分离等等）

$$M_2 = \sqrt{\frac{\int F_v (v - M_1)^2 dv}{M_0}}$$

若为高斯谱， M_2 对应的即是 σ ，半高全宽即为 $\sqrt{8 \ln 2} \sigma$

position-velocity map 位置-速度图

对 data cube 作剖面切片，得到的切面上的强度分布，例如银河系的巡天（射电数据不受消光影响），视向全部叠起来得到 M_0 ，标高等都可读出，但看不到任何运动学的信息。我们不对它压缩，但沿着银纬为 0 切面，纬度信息被抹除，但经度信息被保留，得到了速度-位置分布图，即著名的银河系旋转曲线，以此导出了暗物质的发现。

2.10 课后习题

1 了解国内主要射电望远镜（包括 FAST、上海 65 米、青海德令哈 13.7 米望远镜），列出这些望远镜各个波段接收系统的主要参数（包括工作频率、带宽、谱/速度分辨率）。

2 射电望远镜的点源灵敏度（有时也叫绝对灵敏度）可以比较方便地用“Kelvins per Jansky”表示 (K Jy^{-1})，试计算 75 米口径且口径效率为 65% 的望远镜用 K Jy^{-1} 表示的灵敏度。

3 用一个 15 米口径的望远镜观测一个平滑展源在 345 GHz 上的谱线发射，谱分辨率为 0.2 km/s，观测时的系统温度为 500 K。假设谱线的激发温度为 10 K，并且光学厚；在不考虑望远镜效率的情况下，要在谱线线心的信噪比 (SNR) 达到 10，需要对源观测多长时间？

4 一个 50 米口径的均匀照明望远镜，波束效率为 0.6，在波长为 1.3cm 处观测一个圆形面源。面源在的亮度分布可以近似为一个 FWHM 为 30'' 的二维高斯。测得面源中心峰值处的 T_A^{**} 为 2K，则面源的峰值亮温度为多少？

5 利用给定 fits 文件作出 M_1 图 (<https://box.nju.edu.cn/f/c2fb3831f9824c2ea062/?dl=1>)

Chapter 3

干涉阵

3.1 干涉基本原理

为什么需要干涉仪？分辨率的关系，从天文角度主波束大小即空间分辨率 λ/D 射电上长波，同样的 D ，分辨率比光学低好几个量级

因此需要干涉，将 D 变为 B ， B 为两个相干天线之间的距离，分辨率的提高就变的相对轻松，只要将相干天线拉的足够开就行。综合孔径技术，多个口径比较小的望远镜综合成一架大的望远镜，把小镜子们的面积加起来可以克服单天线辐射收集面积的限制，从而一次成像，摆脱了分辨率极低的尴尬地位，反而成为天文领域分辨率最高的波段

3.1.1 灵敏度

单口径依赖灵敏度，量级 D^2 。而一旦有了干涉阵后，就是所有相干的灵敏度相加 Nd^2 ，使得提高灵敏度变的容易

$$A_{eff} \sim NA_0$$

N 很大时优势明显，但算力要求大

3.1.2 频谱分析

干涉阵可以归结为 (invert) Fourier Transformation + (de)Convolution
时域 \Leftrightarrow 频域的变换是傅里叶变换

3.1.3 空间频率

空间频率上做分解，如图代表亮度分布有大尺度延展成分、有一定中等尺度结构、一些小尺度尖锐结构，近似角度总可分解为若干种空间成分

在干涉阵眼中，只能“看见”等号右边某成分，而不是直接看见左边。此时再对成分做傅里叶变换。然而，这种成分分解是近似的，是不完备的，在傅里叶变换中会带来许多因不完备造成的截断效应，需要进行减卷积去除

3.2 二元干涉仪

若干个小天线隔开一定距离，将获得信号用合适方法结合，做一定计算

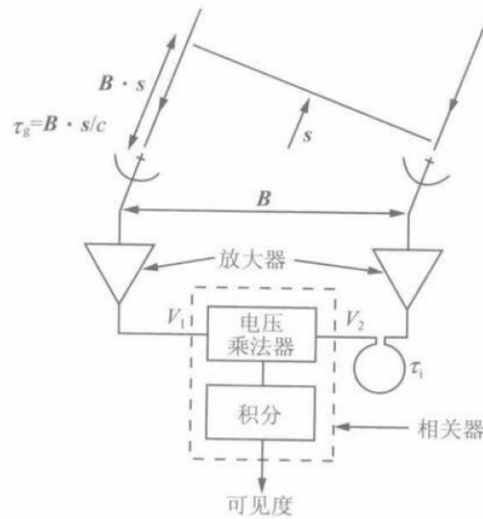


图 3.1: 仪器延迟 τ_i ，几何延迟 (光程差) τ_g

用最简单的单色平面波去表示信号，忽略仪器延迟

$$\tau_g = B \sin \frac{\Omega}{c}, \Omega \text{ 为右侧夹角}$$

一号天线

$$R_1(t) = E \cos \omega t$$

二号天线考虑相位差

$$R_2(t) = E \cos \omega(t - \tau_g)$$

做相干 correlation

$$R_1(t)R_2(t) = \frac{1}{2}E^2 [\cos \omega(2t - \tau_g) + \cos \omega(\tau_g)]$$

对采样时间平均，第一项为 0

$$R_1(t)R_2(t) \sim I_\nu e^{i\omega\tau_g}$$

对立体角积分即得到功率相关

$$R_c = P_\nu \cos(\omega\tau_g)$$

人为加入一个九十度相位，得到了

$$R_s = P_\nu \sin(\omega\tau_g)$$

这样我们能解出功率 P 与 τ_g ，这样的操作称为 Complex Correlator

实际观测为两个波束去接受，看到的信号不仅来自 \vec{s} 方向，而是在波束范围内，信号不可能为简单的单色波，需要去知道无法补偿的相位。现在作向量 $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{\sigma}$, $s_0 \perp \sigma$, 得到 \vec{s} 的相干性，将所有 \vec{s} 叠加起来便是我们想要的实际相干性

$$\tau_g = \frac{\vec{B} \cdot \vec{s}_0}{c}$$

对所有 \vec{s} 积分，也即在主波束立体角积分

$$R(\vec{B}) = \iint G(\vec{\sigma}) I_\nu(\vec{\sigma}) e^{\frac{i\omega}{c} \vec{B} \cdot \vec{s}} d\Omega, G \text{ 为一个二维 Gauss}$$

也即

$$R(\vec{B}) = e^{\frac{i\omega}{c} \vec{B} \cdot \vec{s}_0} \iint G(\vec{\sigma}) I_\nu(\vec{\sigma}) e^{\frac{i\omega}{c} \vec{B} \cdot \vec{\sigma}} d\Omega$$

我们可以认为加进几何延迟来补偿，剩下的项我们称可视度函数 Visibilities

$$V(\vec{B}) = \iint G(\vec{\sigma}) I_\nu(\vec{\sigma}) e^{\frac{i\omega}{c} \vec{B} \cdot \vec{\sigma}} d\Omega$$

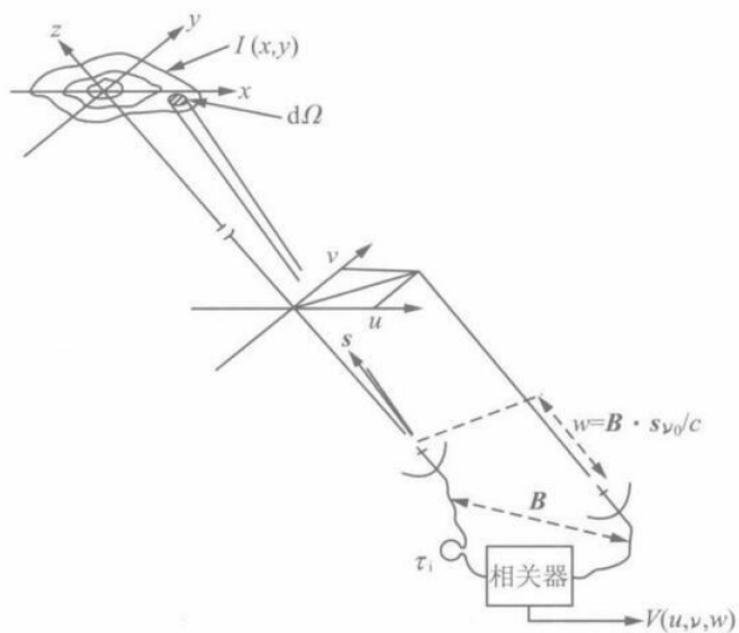
3.3 可视度函数的处理

记

$$I'_\nu(\vec{\sigma}) = G(\vec{\sigma}) I_\nu(\vec{\sigma})$$

$$V(\vec{B}) = \iint I'_\nu(\vec{\sigma}) e^{\frac{i\omega}{c} \vec{B} \cdot \vec{\sigma}} d\Omega$$

若能得到这个量，即相当于在主波束内成了像。为讨论问题，我们要建立合理的坐标系， w 轴平行于 \vec{s}_0 ，即观测方向（实际上是随动的）， u 为东西方向， v 为南北方向。



在天空平面 (image plane) 上强度用 $I(l, m)$ 描述, l, m, n 分别为 \vec{s} 方向余弦

$$\vec{s}_0 = (0, 0, 1), \vec{s} = (l, m, n), \sigma = \vec{s} - \vec{s}_0 = (l, m, 0), n \rightarrow 1$$

地面上两天线连线 (基线向量) 设为

$$\vec{B} = \lambda(u, v, w) = \frac{2\pi c}{\omega}(u, v, w)$$

$$\vec{B} \cdot \sigma = \frac{2\pi c}{\omega}(lu + mv)$$

且

$$d\Omega = \frac{dl dm}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} \sim dl dm$$

于是相应 Fourier 变换对

$$V(u, v) = \iint I'(l, m) e^{2\pi i(lu + mv)} dl dm$$

$$I'(l, m) = \iint V(u, v) e^{-2\pi i(lu + mv)} du dv$$

3.4 uv 覆盖 uv coverage

对一个均匀盘面做傅里叶变换，可以得到 Bessel 函数这种一圈一圈的东西，它们都是因为空间上有截断的东西产生的，就像一维的矩形函数 FT 之后是 sinc 一样的衍射图样。

如果放一个复杂一点的图像进去傅里叶变换，得到的傅里叶变换后的振幅和相位难以看懂，不过我们知道 $V(u, v)$ 的一个点的振幅和相位包含了原图中每一处的信息。幅度代表一定特征空间频率的强度，相位代表了此空间频率成分的位置。在数字图像处理中，通过筛选高频/低频的信息可以实现图像滤波。

但在观测中，我们想要 $I'(l, m)$ 的分布，需要所有的 $V(u, v)$ 的信息，这个采样是不可能实现的。天线的数量是有限的，一个干涉阵在完成一次观测的过程中，一条基线在某一时刻对应 (u, v) 面上一个点，在一段时间内一个天线通过地球自转可以划过一条线，所有线的总和也无法做到完备的覆盖，采样是不完备的。

定义采样函数

$$S(u, v) = \sum_{k=1}^M \delta(u - u_k, v - v_k)$$

实际观测到的可见度函数，实际上只能是 $V(u, v)S(u, v)$ ，对其作 Fourier 变换，得到脏图 Dirty Image，是干涉仪系统对点源的响应，也就是说，脏图只包含了对可见度函数进行测量的空间频率

$$I^D(l, m) = \iint V(u, v)S(u, v)e^{-2\pi i(lu+mv)}dudv$$

定义采样函数的 Fourier 变换为脏束 Dirty Beam

$$B(l, m) = \iint S(u, v)e^{-2\pi i(lu+mv)}dudv$$

于是脏图是真图与脏束的卷积，脏束等效于点扩散函数。脏束可以理解为

$$I^D(l, m) = I'(l, m) * S(l, m)$$

为了得到 $I'(l, m)$ 需要进行减卷积，这是相当麻烦的一件事。

理想情况下，和 δ 函数卷积得到的就是 I' ，而什么经过变换可以得到 δ 函数？答案是常数函数，即意味着无限的完备采样，而这是不可能的，我们能做到只能让采样尽可能的多。

怎么让采样变的多呢？除了增加天线数目外，可以考虑让采样时间变长。两根天线总有一个参考天线（w 轴定义在指向上），形成基线在 uv 平面就是一个点（相应有一个共轭点），由于地球自转，随时间点动成线。充分利用地球自转（如太阳完整一次东升西落），称为一个 track

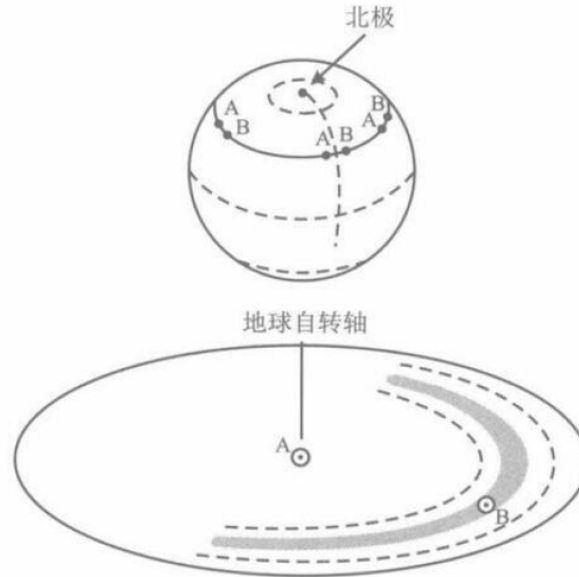


图8.7 沿东—西方向排列的天线对画出的 uv 平面示意图，其中 uv 数据是从源升起跟踪到降落时获得的，它形成一个短轴沿着 v 方向的椭圆环。这个系统的傅里叶变换产生一个赤纬方向被拉长 $1/\sin \delta_0$ (δ_0 是源的赤纬) 倍的椭圆射束

N 很大，track 不再必要，做一个快照式的采样，仍然有非常好的 uv 采样。天线个数较少时，需要增长时间，对于毫米、亚毫米波（射电上低频总是容易的，像厘米波对大气要求低甚至无要求），一般晚上才能工作，会增加时间成本。

3.4.1 从 uv 采样看干涉特性

分辨率与天线个数无关，而由采样范围决定，天线个数影响的是采样密度。

由傅里叶变换性质

$$\frac{1}{\Delta t} \sim \nu \text{ i.e. } (\Delta t)_{min} \sim \nu_{max}$$

空间频率，对它采样时，因为傅里叶变换对关系

$$I'(\theta) \doteq V(B)$$

于是

$$|\theta| \sim \frac{\lambda}{|B|}$$

$$|\theta|_{min} \sim |B|_{max}$$

$$|\theta|_{max} \sim |B|_{min}$$

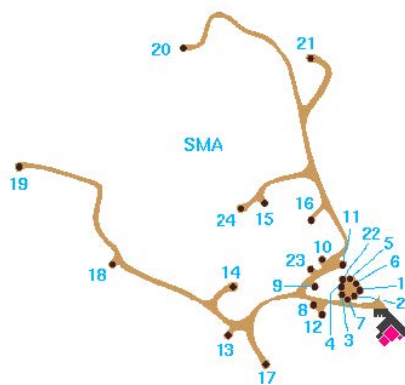
高空间分辨率，即对很小的角度变化敏感，要求 $|B|$ 很大，即基线很长，对应最长基线决定空间分辨率，但同时注意干涉阵 $|\theta|_{max}$ 的存在，因为基线不能无限短，且至少 $|B_{min}| > D$ ，更平缓的结构无法看到，这也是为什么干涉阵取代不了单天线。

干涉仪采样一定空间频率范围内的信号，短基线相对平滑/大尺度结构，长基线相对尖锐/致密结构更敏感 ($B_{max} \rightarrow$ angular resolution)

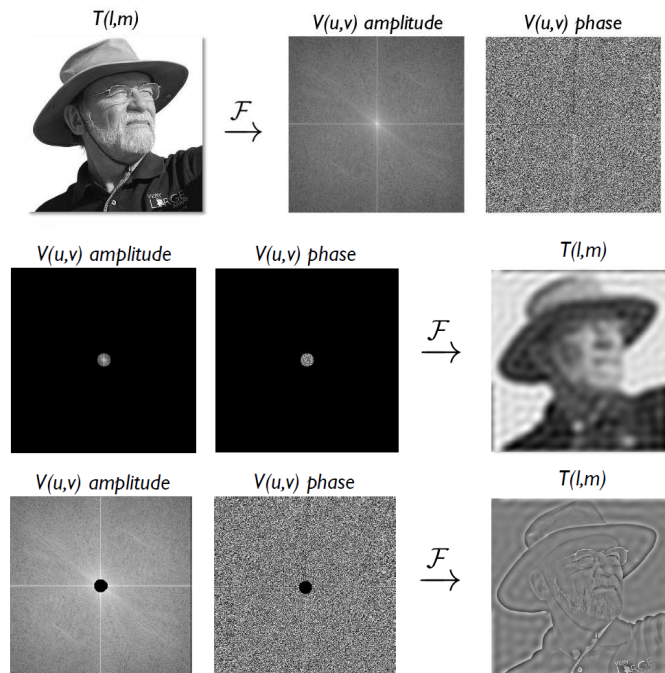
3.4.2 Array configuration

但干涉阵望远镜放在地面上，并不是像搭积木一样随便放。首先要摆放稳，基座应制作稳当；基座下要有光纤连着做相干；三维空间上的相对，都需要测得非常准，以保证相位的精确。各个 B 被固定后，空间分辨率范围基本被确定。但干涉阵在完成一个项目后，对另一个科学需求就不一定能满足，这是相当可惜的。

解决方案称 array configuration，如 SMA，只有八个天线，但有 24 个点位，棕色的为基座，浅色的为路，利用 transporter（其实就是铲车）移动，可以实现各种需求，依 B 从小到大（结构由延展到精细）subcompact、compact、extended、very extended。移动后基线不清楚不准，但天上有很多已知点源，反向利用成为一个测地方法，移动基线使得源清楚来进行校准微小变动。



形象的用图像处理傅里叶变换举例，每个可见度函数 $V(u, v)$ 包含了每一点的 $I'(l, m)$ 的信息，是有强度有相位的复数，对 $I'(l, m)$ 傅里叶变换后是不直观的。截断后，相当于采样，反演 $|u, v| < d$ 区域得到的就是大尺度（平缓结构），而取 $|u, v| > d$ 得到的都是细节的结构。



考虑无限平滑展源, $I'(l, m) \rightarrow \text{Const}$, $V(u, v) \rightarrow \delta$, 但干涉阵中间总有个洞 ((0, 0) 周围采样不到, 最短基线内称 UV inner hole/ Zero-spacing problem)。能做到这件事的是单天线, 但其分辨率很差

⇒ 任何一个干涉阵都会漏掉一部分信息——spatial filtering effect

3.5 洁净成图 cleaned map

3.5.1 干涉仪成图

$$V^{obs}(u, v) \xrightarrow{FT} I^D(l, m) \xrightarrow{De-conv} I'(l, m)$$

FT 过程产生脏图与脏束, 最经典的 de-conv 方法相应称为“洁化”(cleaned)

3.5.2 洁化

基本假设是真实的 image 是很多点源的叠加, 可以一点一点处理, 在 dirty map 上找到最强的点源 (图不知真假, 但最强处必有真实信号, 尽管不知道多少), 然后减掉那点上的 dirty

beam (减掉强度的 5%-10%, 代表认为百分之五到百分之十的信号为真, 这个百分比称为 gain; 减掉的是所谓 $\delta(\text{gain} \cdot \text{peak}) * B(l, m)$), 把减掉的成分记录, 称为 clean component。循环重复上述操作, 直到剩余的 map 只剩下噪声, 通常这个过程要重复百次余。与 clean beam (是 dirty beam 的 central beam 的一个二维高斯拟合) 卷积, 再加上最后的剩余图成图

更严格的说, 这是一个迭代方法。数学抽象为问题: 对真实而未知的强度分布 $I(x, y)$ 的近似是通过具有正的强度 A_i , 位于 (x_i, y_i) 的有穷的大量点源的叠加实现的, cleaned 的目的就是确定 $A_i(x_i, y_i)$, 使得

$$I''(x, y) = \sum_i A_i B_D(x - x_i, y - y_i) + I_\varepsilon(x, y)$$

其中 I'' 是从可见度函数反演得到的脏图, B_D 为脏束, $I_\varepsilon(x, y)$ 为分解后的残差亮度分布, 若 I_ε 的量级与测量的强度相当, 近似可认为是好的近似, 而这种分解不能解析的实现, 需要通过迭代

首先找到脏图峰值强度, 从图像中以脏图的形状减去一个 γ 部分; 这个过程重复 n 次, 循环增益 $0 < \gamma < 1$ 有助于迭代收敛, 迭代持续到剩余强度峰值低于某个极限。得到的点源模型与 clean beam 卷积, clean beam 一般为高斯形, 其 FWHP 与脏束相似

那有没有不需要做减卷积的情况呢? 答案是肯定的。结合真实的随机噪声。dirty map 上如果出现 sidelobe (旁瓣), 强度由与真实信号卷积得到, 如果真实信号很弱 (如 4σ), 乘起来后会完全被噪声淹没 ($\sigma \sim 2\sigma$ 以内), clean 的目的是去掉 sidelobe, 而其已经被淹没, 便不需要再减卷积

3.6 干涉仪实测

3.6.1 基本逻辑

单天线望远镜只需要考虑强度标准, 但对于干涉仪来说, 既要考虑强度 amplitude, 又要考虑相位 phase

影响因子 G_a, ϕ 来源于大气、天线、接收机等, 可以看作频率、时间、基线的函数

$$V(B)_{obs} = G_a e^{i\phi} \iint I'(\sigma) e^{\frac{i\omega}{c} B \cdot \sigma} d\Omega$$

3.6.2 数据校准

校准的基本原则是强度与相位。基线相关可修正消去, 时间相关一般来源于大气, 频率相关一般来源于仪器, 频率与时间可分离变量, 这是基本假设

$$G_a(\nu, t, \vec{B}) \Rightarrow G_a(\nu, t) \Rightarrow G_a^1(\nu) G_a^2(t)$$

$$\phi(\nu, t, \vec{B}) \Rightarrow \phi(\nu, t) \Rightarrow \phi^1(\nu)\phi^2(t)$$

由于 Spatial filtering effect 的存在, On-Off 干涉不再可行, 而选用校准源方法, 包括随频率变化的通道校准 (bandpass callibration)、随时间变化的增益校准 (gain calibration)、绝对流量校准 (flux calibration)

3.6.3 通道校准 bandpass

对一个亮射电源 (最好是点源, 因为如若结构很大在长基线上可能很弱) 长时间积分观测, 确定带宽内强度和相位随频率的变化, 作“拉平”, 这种拉平需要信噪比

3.6.4 灵敏度

System Equivalent Flux-Density

$$SEFD = \frac{2kT_{sys}}{A_e}$$

干涉阵灵敏度 (噪声)

$$S_{rms} = \frac{SEFD}{\eta_c \sqrt{N(N-1)\Delta\nu t}}$$

假设用 8 个单元的干涉仪观测, 对目标源积分 6h, 在 1km/s 谱分辨率上能达到 100mJy/beam 灵敏度, 那对一个 5Jy 的通道校准源至少观测多长时间。作校准, 至少也要达到信噪比 5, noise=1Jy, 问题转化为 t=6h, $\Delta\nu = 1\text{km/s}$ 那么 t=?, s.t. 达到相应信噪比, 这里的重点是作校准是一个 baseline 一个 baseline 的做, N=2 而不再是 8

3.6.5 增益校准

随时间变化的增益校准, 在观测源附近找一个亮射电点源, 通过对该点源与观测源之间的交替式观测, 改正观测时间内由大气和望远镜系统产生的强度和相位变化。

⇒

1. 附近: 因为要获得大气对强度和相位产生的改变, 我们要求获得的大气解能适用于 target, 最好在几度以内;

2. 亮: 亮是因为分配时间短, 要达到信噪比则需要亮;

3. 点源: 严格要求是点源, 因为我们得到的可见度函数是关于整个 $\sigma = s - s_0$ 的积分, 其相位是一个非零的值, 变成点源, 点发射, 没有大气影响时, 相位就是 0, 不是零则只是大气影响, 源结构本身不产生相位。有结构的可看作点源集合, 相位复杂且还与基线有关, 会发生变动, 只能依赖模型解, 通常是不可靠的)

为了提高信噪比，一般用连续谱（整个带宽中平均，不然时间太长了）信号。

假设用 8 个单元的干涉仪观测，对目标源积分 6h，在 1km/s 谱分辨率上能达到 2mJy/beam 灵敏度，那对一个 0.5Jy 的校准源至少观测多长时间。

信噪比 5，noise 为 0.1Jy，问题转化为 $t=6h, N=8$ ，那么 $0.1Jy, N=2, t=?$

这里的校准源流量不是随便选的，因为前面 bandpass 总能在满天找，总能找个较亮的，但这里要求附近，亮度足够的源（通常用类星体）难以寻找，到了高频（越高频，大气影响越剧烈），特别 500GHz 以上，亮度足够的类星体很少，一定程度上限制了干涉仪观测

3.6.6 绝对流量定标 flux calibration

仅通过系统温度的测量只能得到大致的流量密度，要更准确地测量流量，可以通过观测已知流量水平的校准源（类星体或行星、行星卫星等），仅在精度要求很高时要求此步
到此我们可以总结一下干涉仪观测的实测逻辑

$$V^{raw}(u, v) \xrightarrow{\text{calibration}(bandpass, gain, flux)} V^{obs}(u, v) \xrightarrow{\text{Imaging}(FT, CLEAN)} I' \Rightarrow I$$

3.7 特殊的射电干涉阵

3.7.1 VLBI

VLBI，即甚长基线干涉技术

不是实时相干（不做连线相干，实际因为相去甚远也做不了连线相干），天线各采集各的，即在不同地点独立观测，最后将数据一起做相干，关键则要求时间对准。故利用高稳定 LO 和原子钟等精确记录数据和计时。

观测时在目标源与校准源间切换，可靠的相位校准要求多少个 calibrator

弱点：对源的亮温度要求。以充满甚长干涉 clean beam 的立体角，根据可测源的流量，平均亮温度有要求

$$\frac{2kT_b}{\lambda^2} \theta^2 \geq 5S_{rms} \Rightarrow T_b \geq \frac{2.5}{k} S_{rms} \frac{\lambda^2}{\theta^2} \propto \frac{1}{\theta^2}$$

JVLA 以 0.1 km/s 的谱分辨率做谱线观测，对源积分 1 小时，在 1.3 cm 波段可达到 ~mJy 量级的灵敏度，在分辨率为 ~1'' 时，对源“亮温度”要求为 ≥ 1 K；

基线长度达 ~1000 km 的 VLBI， $\theta \sim 1$ mas，要求 $T_b > 10^6$ K！

如果 $\theta \sim 0.1$ mas，要求 $T_b > 10^8$ K !!

如果是到 10 微秒的 VLBI，要求 $T_b > 10^{10}$ K !!!

因此，VLBI 观测的源种类很受限制，主要观测非热源，如脉泽、AGN 喷流

3.7.2 单天线 + 干涉仪 Filling the zero spacings

基本过程

- 用干涉仪和单天线对目标源成图（同样的频率或谱线）
 - 对单天线数据进行适当地格点化重采样、解卷积后模拟出单镜 Visibilities
 - 干涉仪和单镜 Visibilities 叠加在一起，按一般干涉仪 imaging 过程成图
- 单天线

$$B \sim \sqrt{u^2 + v^2} : 0 \sim D$$

干涉阵

$$B \sim \sqrt{u^2 + v^2} : B_{min} \sim B_{max}$$

要求选择单天线口径大于干涉阵最短基线，这样构成完整的无 gap 覆盖

3.8 课后习题

1. 参考 VLA 网站，给出 3.6cm、1.3cm、0.7cm 波段 VLA 连续谱观测对目标源积分 10 分钟能达到的 RMS 灵敏度

2. 可视度函数 $V(u, v)$ 在 $V(0, 0)$ 对应的是什么物理量？由此可以判断干涉仪观测的什么特征？

3. 干涉仪观测到的视场由什么决定？不同口径的天线是否可以组成一个干涉仪？如果可以的话，视场大小是怎样的？

4. 一个单天线对着一个天体源的中心观测，测到的流量密度是 5 Jy；用另一个单天线去做同样的观测，得到的流量密度是 3 Jy；再用一个干涉阵去观测，得到的流量密度为 0.5 Jy。三次观测的操作和数据校准都没有问题，并且该天体源没有时变，试讨论得到不同流量密度的原因；另外，当用天线温度或波束内的平均亮温度表示测量值时，三个望远镜测量值的相对大小会是怎么的？

5. 通过网站了解 NOEMA (NOrthern Extended Millimeter Array) 和 SMA (Submillimeter Array) 的基本参数，比较这两个干涉阵在 1.3 mm (230 GHz) 波段的基本性能 6. 有没有不需要做减卷积的情况，为什么？ 7. 使用某干涉阵做 1mm 波段的观测，搜寻 gain calibrator 时获得如下 quasar 列表 (1) 根据 quasar 离目标源的距离 (第 1 列) 以及 quasar 的 flux density (最后 1 列) 确定最合适的 gain calibrator; (2) 该干涉阵由 15 个天线组成，观测 1 小时对应的连续谱灵敏度为 5 mJy，那对上述所选 gain calibrator 每次需观测多长时间？

Dist. (°) from specified coords.	Source Name		J2000 Coordinates (from VLA)		Band	Last Obs. Date	Obs.	Flux Density (Jy) 30.0 day avg
	common	IAU (J2000)	RA	Dec				
11.4	--	1516+002	15:16:40.2190	+00:15:01.908	1mm	03 Jun 2015	SMA	0.60 ± 0.05
					850 μ m	04 Jun 2010	SMA	0.50 ± 0.08
12.7	--	1557-000	15:57:51.4339	-00:01:50.413	1mm	03 Jun 2015	SMA	0.23 ± 0.03
					850 μ m	20 May 2010	SMA	0.17 ± 0.03
13.1	--	1439-155	14:39:56.8720	-15:31:50.555	1mm	29 Jan 2015	SMA	0.16 ± 0.04
					850 μ m	27 Dec 2006	SMA	0.39 ± 0.12
14.0	--	1517-243	15:17:41.8131	-24:22:19.475	1mm	16 Jun 2015	SMA	1.44 ± 0.07
					850 μ m	15 Apr 2014	SMA	1.06 ± 0.07
14.1	--	1549+026	15:49:29.4368	+02:37:01.163	1mm	14 Jul 2015	SMA	1.72 ± 0.09
					850 μ m	11 Jul 2013	SMA	0.68 ± 0.06
14.7	--	1433-158	14:33:21.4593	-15:48:44.687	1mm	15 Jun 2015	SMA	0.07 ± 0.02
					850 μ m	27 Dec 2006	SMA	0.41 ± 0.15

8. 用 GBT 望远镜在 23.7 GHz 观测一个射电源的谱线发射，对源积分 50 分钟，在 0.1 km/s 的谱分辨率下，在谱线峰值处的信噪比为 10；如果用 VLA 在 D configuration 观测这个源同样的谱线发射，要在谱线峰值得到信噪比为 10 的探测，需要对源积分多长时间（提示：对源的大小分两种情况讨论）？

Chapter 4

部分习题提示与参考答案

前两章习题重点注意何时可以长波近似，何时需按原理公式，其余都是套公式，第三章习题相比前两章实测味较浓

3.1

3.6cm:6.8 mJy/0.78mK (3-bit sampler, 4GHz BW, dual pol.)

1.3cm:12.5 mJy/1.43mK (3-bit sampler, 8GHz BW, dual pol.)

0.7cm:24.2 mJy/2.76mK (3-bit sampler, 8GHz BW, dual pol.)

3.2 对应的是 total flux，由此可判断干涉仪观测无法测量 total flux，也就是 zero-spacing problem

3.3 视场由天线的 beam 决定，也就是 primary beam；不同口径天线可以组成干涉仪，视场由口径大的天线决定（也即波束小的决定，都有的才能相干）

3.4

两个单天线测量从 5Jy 到 3Jy，应该是源比较延展，第二个天线口径较大，视场较小，观测到的发射区域较小

用天线阵观测得到 0.5Jy，远小于单天线测量，应该是 spatial filtering effect 造成的

用天线温度或波束内平均亮温度表示的话，考虑到干涉阵也测量到部分流量，因此源不是非常平滑延展，而是类似于高斯分布，大尺度、中等尺度、小尺度上取平均，因此亮温度（波束内平均辐射强度）应该是越来越高

3.5

天线数 12,8;

天线口径 15m,6m;

最长基线 760m(new 1700m),509m;

总带宽 16GHz(dual pol),24(full pol.)/44GHz(single);

谱分辨率 64.5kHz@64MHz,140kHz

灵敏度 >> 分辨率 > 视场 < uv 覆盖 >

3.6 如果真实信号很弱 (如 4σ), 乘起来后会完全被噪声淹没 ($\sigma \sim 2\sigma$ 以内), clean 的目的是去掉 sidelobe, 而其已经被淹没, 便不需要再减卷积

3.7 选择 1549+026, 1.72 ± 0.09

选择信噪比为 5, noise=1.72Jy/5=344mJy, 问题转化为

$$N = 15, t = 1\text{h}, \sigma = 5\text{mJy}$$

$$N = 2, t = ?, \sigma = 344\text{mJy}$$

得到 1.33min

3.8 GBT 在 23.7GHz 观测 50 分钟 (3000sec), $\Delta v = 0.1\text{km/s}$ 的情况下, $\sigma = 5\text{mJy}$, Beam=0.52 arcmin=31.2'', 所以 flux=50mJy

考虑一下两种简化情况:

(1) 射电源为点源。则 GBT 与 VLA 观测到的 flux density 完全一样, 那么用 VLA 观测同样需要 $\sigma = 5\text{mJy}$, 需要 $t_{on-source} = 49\text{m}39\text{s}$

(2) 射电源为比较延展的。VLA D configuration 的 cleaned beam=4.372'', $B_{min} = 35\text{m}$, $\theta_{LAS} = 66''$, 假设源均匀充满 GBT 的 31.2'' 的 beam, 那么 source flux 在 VLA 观测下为 $50 \cdot \left(\frac{31.2}{4.4}\right)^2 = 1\text{mJy}$, σ 需要为 0.1mJy, 需要 $t_{on-source} = 2069\text{h}$

整理者邮箱:221840182@nju.edu.cn/1530097561@qq.com

2024.12.28 v2 修正了部分错别字、表述欠佳处以及公式错误