ELEYANG DESIGN

La Vita E Bella

MATH

ELEYANG DESIGN

5

Content
内容

【线性代数】【解析几何】【线I】

Review
复习记录

/ / / / /

Chapter 线I

Title 空间向量　　Date 9/28

Keywords 关键词	Notes 笔记　　Review 复习记录 / / / / /

§.向量叉乘

[定义] $\vec{a}\times\vec{b}$ 为一个向量　$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

方向遵循右手系

[运算规律] $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\alpha\vec{a}\times\beta\vec{b}=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

[坐标] $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

证: $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$

$\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3}$

$\vec{a}\times\vec{b}=a_1b_2(\vec{e_1}\times\vec{e_2})+a_1b_3(\vec{e_1}\times\vec{e_3})+a_2b_1(\vec{e_2}\times\vec{e_1})+a_2b_3(\vec{e_2}\times\vec{e_3})+a_3b_1(\vec{e_3}\times\vec{e_1})+a_3b_2(\vec{e_3}\times\vec{e_2})$

$[\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}\quad \vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1}\quad \vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}]$

$\to=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e_1}+(a_2b_1-a_1b_2)\vec{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e_3}$

§.混合积

$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ 表示以 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 为邻边的平行六面体体积

($|\vec{a}\times\vec{b}|$ 以 $\vec{a}$ $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}c_3+\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}c_2$$

§.平面方程

[点法式方程] $P(x,y,z)$ 在平面 $\vec{n}$ 上　$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 不在 $\vec{n}$ 上　$\vec{n}=(A,B,C)$

$\Rightarrow\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}\quad\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

[一般方程] $Ax+By+Cz+D=0\quad \vec{n}=(A,B,C)$

! 任一平面方程都是三元一次方程

[特殊位置平面] 1) $Cz+D=0$

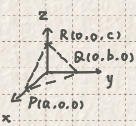
$\vec{n}=(0,0,C)\parallel z$ 轴 $\Rightarrow\pi\parallel xOy$

2) $By+Cz+D=0$

$\vec{n}=(0,B,C)\perp x$ 轴 $\Rightarrow\pi\parallel x$ 轴

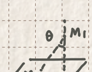
3) $Ax+By+Cz=0\Rightarrow\pi$ 过原点

[截距式方程] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



§.点到平面距离

$M_1(x_1,y_1,z_1)\quad\pi: Ax+By+Cz+D=0\quad\vec{n}=(A,B,C)\quad d=?$



$$d=|\overrightarrow{M_0M_1}|\cdot|\cos\theta|=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|\Rightarrow d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Keywords 关键词	Notes 笔记

§.空间中直线方程

L 作为平面 $\begin{cases}\pi_1 & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2 & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的交线

$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

$\vec{\alpha}$ 为 L 方向向量

$\vec{\alpha}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(l,m,n)$

[点向式方程] $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

[两点式方程] $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

$\Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

[参数方程] $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$

$\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$

[向量方程] $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{\alpha}$

§.平面与平面关系

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

① $\cap \Leftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ 不共线

② $\parallel \Leftrightarrow \exists\lambda\neq0$ s.t. $\vec{n}_2=\lambda\vec{n}_1$

③ $= \Leftrightarrow \exists\lambda\neq0$ s.t. $\lambda(A_1,B_1,C_1,D_1)=(A_2,B_2,C_2,D_2)$

④ $\perp \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

[平面夹角] $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 夹角 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$

[平行平面束] $Ax+By+Cz+K=0$

§.平面与直线关系

$L: \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{\alpha}$

$\pi: \vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$

代入 $\Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)+t\,\vec{n}\cdot\vec{\alpha}=0$ L 与 π 关系式

① $\vec{n}\cdot\vec{\alpha}=0$ $\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\neq0$

$\Rightarrow L\cap\pi=\varnothing \Rightarrow L\parallel\pi$

② $\vec{n}\cdot\vec{\alpha}=0$ $\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)=0$

$\Rightarrow L\subset\pi$

③ $\vec{n}\cdot\vec{\alpha}\neq0 \Rightarrow L$ 穿过 π $t=\frac{\vec{n}\cdot(\vec{r}_0-\vec{r}_1)}{\vec{n}\cdot\vec{\alpha}}$

[线面夹角] $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2}]$

先求 $\vec{n}$ 与 L 夹角 θ $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{n}|}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{n}|}$

Summary 总结

Chapter

Title **Date** /

Keywords 关键词	Notes 笔记 Review 复习记录 / / / / /

§.有轴平面束
[平面系方程]

[定义] 过L的所有平面所成的集合

设 L: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (其中 $\pi_1 \cap \pi_2$)

经过L任一平面方程:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

例: L $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x+2y+3z-6=0 \end{cases}$ 求π过L, ∥x轴

$\pi: \lambda(x+y+z-3)+\mu(x+2y+3z-6)=0$

$\vec{n}=(\lambda+\mu, \lambda+2\mu, \lambda+3\mu)$ $\vec{e_1}=(1,0,0)$

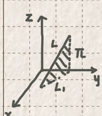
$\vec{n}\perp\vec{e_1} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{e_1}=\lambda+\mu=0$

令 $\lambda=1$ 则 $\mu=-1$

$\Rightarrow \pi: -y-2z+3=0$

§.垂直投影

[定义] 当L不⊥于xOy面时 π_1与xOy面交线 L_1 为L在xOy面上的垂直投影



求π_1? L $\begin{cases} A_1x+\cdots=0 \\ A_2x+\cdots=0 \end{cases}$

设π_1: $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

$\pi_1 \parallel \vec{e_3}$: $\lambda C_1+\mu C_2=0$

$\Rightarrow \pi_1: (C_2A_1-C_1A_2)x+(C_2B_1-C_1B_2)y+C_2D_1-C_1D_2=0$

L_1: $\begin{cases} \pi_1 \\ z=0 \end{cases}$

求π将π, π_1联立再消去z(x/y)即可

ex: L: $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在π: $x+2y-z=0$上投影直线L

$L\subset\pi' \Rightarrow \lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y-z+1)=0$

$\vec{n}'=(2\lambda+\mu, \mu-\lambda, \lambda-\mu)$

$\vec{n}=(1,2,-1)$

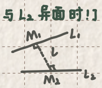
$\vec{n}'\cdot\vec{n}=-\lambda+4\mu=0 \Rightarrow \begin{cases} \mu=\frac{1}{4} \\ \lambda=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \pi': 3x-y+z-1=0$

$\Rightarrow L': \begin{cases} \pi' \\ \pi \end{cases}$

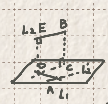
§.直线与直线关系

[L_1与L_2异面时!]



L: L_1与L_2公垂线
$|M_1M_2|$为其长 [存在性.唯一性.最短性]

prof: 存在性



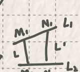
过A作$L_2' \parallel L_2$ 形成π

过B作BC⊥π ∩π=C

过C作CD∥L_2' ∩L_1=D

DE⊥L_1, ⊥L_2

prof: 唯一性 假设L, L' $\begin{matrix} L\perp L_1 \; L\perp L_2 \\ L'\perp L_1 \; L'\perp L_2 \end{matrix}$ ⇒

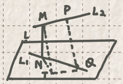


$\Rightarrow L \parallel L' \Rightarrow M_1M_2N_2N_1$共面 ⇒ ×

Keywords 关键词	Notes 笔记

prof：最短性

如图：



[计算方式] 设 L_1 过 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{a}=(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + t\alpha_1 \\ y = y_1 + t\beta_1 \\ z = y_2 + t\gamma_1 \end{cases}$$

同理 L_2, Q, $\vec{b}$ $\quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + t\alpha_2 \\ y = y_2 + t\beta_2 \\ z = z_2 + t\gamma_2 \end{cases}$

设公垂线垂足 $M_1(x_3, y_3, z_3) \in L_1$

$M_2(x_4, y_4, z_4) \in L_2$

For

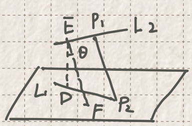
God's

Sake !

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + t_1\alpha_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots \\ z_4 = z_1 + t_2\gamma_2 \end{cases}$$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 + t_2\alpha_2 - t_1\alpha_1, \cdots\cdots)$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{b} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1, t_2$$



[一般方法] $L_1 \to \vec{a}$ $\quad L_2 \to \vec{b}$

$d = |\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{EF}|\,|\cos\theta|$

DE 方向向量 $\vec{\alpha} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{P_2P_1}$

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| \frac{|\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{P_2P_1}|}{|\vec{\alpha}|\cdot|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{|\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{\alpha}|}$$

$$\left.\begin{aligned} L, L_1 \Rightarrow \pi_1 \\ L, L_2 \Rightarrow \pi_2 \end{aligned}\right. \Rightarrow L = \pi_1 \cap \pi_2$$

ex L_1: $x-3 = y-4 = -(z+1)$ 求 L

L_2 $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y+1}{4} = -z$

L_1: $P_1(3, 4, -1)$ $\quad \vec{a} = (1, 1, -1)$

L_2: $P_2(-4, -1, 0)$ $\quad \vec{b} = (2, 4, -1)$

$\vec{a}\times\vec{b} = (3, -1, 2)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = (-7, -5, 1)$

$$d = \frac{|21 - 5 - 2|}{\sqrt{9+1+4}} = \sqrt{14}$$

π_1 过 $P_1(3, 4, -1)$ $\quad \vec{n}_1 = \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (1, -5, -4)$

π_2 过 $P_2(-4, -1, 0)$ $\quad \vec{n}_2 = \vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 7\cdot(1, -1, -2)$

$$L: \begin{cases} x - 3 - 5(x-4) - 4(z+1) = 0 \\ x + 4 - (y+1) - 2z = 0 \end{cases}$$

Summary 总结

§. 曲面方程

[基本关系]

1) $\forall (x,y,z)\in\Sigma$ $F(x,y,z)=0$　2) $\forall F(x,y,z)=0$ $(x,y,z)\in\Sigma$

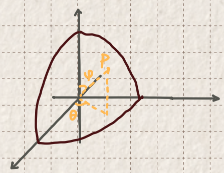
则称 $F(x,y,z)$ 是 Σ 方程　Σ 是 $F(x,y,z)=0$ 图形

[参数式]

1) $\forall (x,y,z)\in\Sigma$ 都可以写为：　2) $\forall (u,v)\in D$　① 确定点 $(x,y,z)\in\Sigma$

$$\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases} \quad ①$$

[球面]
$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases}$$



[空间曲线方程]

$$l:\begin{cases} F(x,y,z)=0 & \to \Sigma_1 \\ G(x,y,z)=0 & \to \Sigma_2 \end{cases}$$

$$l:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$$

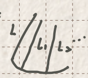
§. 特殊曲面 #1

[柱面]

定义：动直线沿曲线 Γ 平行于 L 运动

L 母线　Γ 准线

图示：



Key: $PP' \parallel \vec{a}$

求柱面 Σ 方程？以 $\Gamma\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$ 为准线　L 为母线

$L \to \vec{a}=(\alpha,\beta,\gamma)$

则 Σ：$\begin{cases} x=f(u)+\alpha v \\ y=g(u)+\beta v \\ z=h(u)+\gamma v \end{cases}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　椭圆柱面

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　双曲柱面

$y^2=2px$　抛物柱面

特例　$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=c \end{cases}$　$L \parallel z$ 轴

$\Rightarrow \Sigma$：$f(x,y)=0$

ex　$\Gamma\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2-2z=0 \end{cases}$

求 Γ 在 $z=0$ 上投影柱面

L：$\vec{a}=(0,0,1)$

设 $L\cap\Gamma=P'=(x',y',z')$　$PP' \parallel \vec{a}$ $\Rightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=z+t \end{cases}$

$$\begin{cases} x'^2+y'^2+z'^2=3 \\ x'^2+y'^2-2z'=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (z+t)^2+2(z+t)=3$

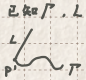
$(z+t+3)(z+t-1)=0$　$z+t=-3/1$

① $x^2+y^2=-6$ ×　② $x^2+y^2=2$ ✓

Summary 总结

曲面方程求法基本思路

已知 Γ，L



① 设 Γ 与 L 交点 P'　P' 满足 Γ.L 2个方程

② 找出每个 L 上 P' 与 P 的关系，得到 1 个方程 [各特殊曲面的不同关系]

③ 三个方程消元 只剩 (x,y,z)

柱面：$\vec{PP'} \parallel \vec{L}$　$\vec{a}=(a,b,c)$ $\begin{cases} x'=x+at \\ y'=y+bt \\ z'=z+ct \end{cases}$

[用 t 消去 $x'y'z'$ 再用①②消 t]

旋转面．$|P'P_0|=|PP_0|$

先构出 P_0

锥面：P_0PP' 共线：

$t=\frac{x'-x_0}{x-x_0}=\frac{y'-y_0}{y-y_0}=\frac{z'-z_0}{z-z_0}$

Chapter

Title　　Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记　　Review 复习记录 / / / / /

§.特殊曲面 #2

[锥面] Γ. $P_0 \notin \Gamma$　P_0与Γ上每点连线构成曲面Σ

key: $P_0\ P\ P'$ 三点共线

求Σ步骤:

① $P' = \Gamma \cap L$　P'满足 $F(x', y', z') = 0$
$G(x', y', z') = 0$

特例: $\Gamma: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=c \end{cases}$　$P_0(0,0,0)$

$\Rightarrow \Sigma: f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0$

② 三点共线:

$$\frac{x'-x_0}{x-x_0} = \frac{y'-y_0}{y-y_0} = \frac{z'-z_0}{z-z_0} = t$$

$$\begin{cases} x' = t(x-x_0)+x_0 \\ y' = t(y-y_0)+y_0 \\ z' = t(z-z_0)+z_0 \end{cases}$$

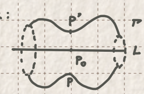
③ 将 $x'\ y'\ z'$ 代入 $F\ G$　一个消t 一个作答

[旋转面] Γ. L轴　Γ绕L旋转构成曲面Σ

经线: $\forall \pi$ 且 $L \subset \pi$　$\pi \cap \Sigma$

纬线: $\forall Q \in \Gamma$　Q绕L旋转所得圆周

图示:



key: $|\overrightarrow{PP_0}| = |\overrightarrow{P_0P'}|$

① $P' \in \Gamma$　$F(x', y', z') = 0$
$G(x', y', z') = 0$

特例 $\Gamma \begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$　L Ox轴

$\Rightarrow \Sigma\quad f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$

② 求P_0　用P'表示P_0　I. $P_0\ P$在π系上 $Ax+By+Cz+D=0$
$\vec{a} = (A, B, C)$

II. $P_0 \in L \Rightarrow$ 用D表示 $x_0. y_0. z_0$

III. $|\overrightarrow{P_0P}| = |\overrightarrow{P_0P'}|$

[直纹面] 直线构成面总称

常见直纹面

双曲抛物面　$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$

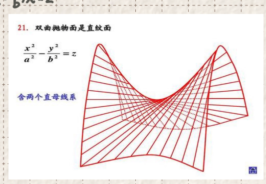
$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = 2z$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) & 2 \\ z & \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ z\lambda_1 + \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \exists \lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ s.t $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\lambda \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\lambda = z \end{cases}$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \Leftrightarrow \exists \lambda \in R$ s.t. M_0满足 $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\lambda \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\lambda = z \end{cases}$

$\Rightarrow$ 直线族1 $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\lambda \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\lambda = z \end{cases}$

同理 直线族2 $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 2\mu \\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\mu = z \end{cases}$

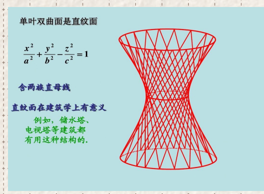


[性质] 对族1: $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\lambda \\ \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\lambda = z \end{cases}$　$\vec{\alpha} = (a, -b, 2\lambda)$

2: $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 2\mu \\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\mu = z \end{cases}$　$\vec{\beta} = (a, b, 2\mu)$

性质① 同族两条母线异面　[$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ 无公共点 且$\vec{\alpha_1} \nparallel \vec{\alpha_2}$]

② 异族两条母线相交　[$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2\lambda \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b} = 2\mu \\ z = 2\lambda\mu \end{cases}$ 有唯一解 且$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$]



单叶双曲面　$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Keywords 关键词 | Notes 笔记

$\Leftrightarrow\ (\frac{x}{a}-\frac{z}{c})(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=(1+\frac{y}{b})(1-\frac{y}{b})$

$\Leftrightarrow\ \begin{vmatrix} \frac{x}{a}+\frac{z}{c} & 1+\frac{y}{b} \\ 1-\frac{y}{b} & \frac{x}{a}-\frac{z}{c} \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} (\frac{x}{a}+\frac{z}{c})\lambda_1+(1+\frac{y}{b})(-\lambda_2)=0 \\ (1-\frac{y}{b})\lambda_1+(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})(-\lambda_2)=0 \end{cases}$ ①

$\Rightarrow M_0$ 满足 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2$ 不全为0 s.t. M_0 满足①

$\Rightarrow$ 直线族: $\begin{cases} \lambda_1(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\lambda_2(1+\frac{y}{b}) \\ \lambda_1(1-\frac{y}{b})=\lambda_2(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}) \end{cases}$ $\vec{\alpha}=(\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{bc}, \frac{2\lambda_1\lambda_2}{ac}, \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{ab})$

$\begin{cases} \mu_1(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\mu_2(1-\frac{y}{b}) \\ \mu_1(1+\frac{y}{b})=\mu_2(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}) \end{cases}$ $\vec{\beta}=(\frac{\mu_2^2-\mu_1^2}{bc}, -\frac{2\mu_1\mu_2}{ac}, \frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{ab})$

①同族异面 ②异族共面（相交 or 平行）

常见二次曲面

[二次曲面] 方程为二次的曲面

柱面

椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面 $x^2=\pm 2py$

锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

其它二次曲面

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

坐标 变换 → **常见二次曲面**

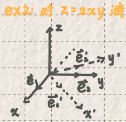
平移 ex1: $x^2+y^2-5z^2-2x-4y+30z-40=0$

由配方: $(x-1)^2+(y-2)^2-5(z-3)^2=0$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{5}-(z-3)^2=0$

锥面，以(1,2,3)为顶点.

旋转 ex2: 对 $z=2xy$ 消去交叉项



绕z轴逆时针转 $\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} \vec{e_1}'=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2} \\ \vec{e_2}'=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2} \\ \vec{e_3}'=\vec{e_3} \end{cases}$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}$

$=x'\vec{e_1}'+y'\vec{e_2}'+z'\vec{e_3}'$

$=x'(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2})+y'(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2})+z'\vec{e_3}$

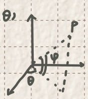
$=(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')\vec{e_1}+(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')\vec{e_2}+z'\vec{e_3}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ z=z' \end{cases}$ $\Rightarrow z'=2(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')=x'^2-y'^2$

Interlude

1. $(x,y,z) \longleftrightarrow (\rho,\varphi,\theta)$

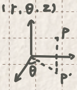
$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$



球面坐标系

2. $(x,y,z) \rightarrow (r,\theta,z)$

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$



柱面坐标轴

Summary 总结

ELEYANG DESIGN

6

Content
内容

[线性代数][行列式与矩阵][线Ⅱ]

Review
复习记录

/ / / / /

Content 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Title 行列式

Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记

Review 复习记录 / / / / /

§.行列式

由特殊到一般

2阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

观察：1. a_{ij} i 行标 j 纵标

2. 行标自然顺序

3阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

interlude

[n阶排列] 由1, 2, ⋯, n 组成的一个有序数组

排列总数：n!　　自然顺序：1, 2, 3 ⋯ n

[逆序数] 若一对数前后位置与大小顺序相反，记为一个逆序

例如 2431： 21 43 41 31 ⇒ 4

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 逆序数为 τ

τ 奇：奇排列　τ 偶：偶排列

{n阶行列式} (1) 由 m×n 个数排成 m 行 n 列的矩阵

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$ 称为一个 m×n 矩阵

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

(2) m=n　A为n阶方阵　对应的数为 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ or } |A| \text{ or } \det A$$

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

Q: D_n 中正负项是否各占一半?

Def. 在一个排列中两个数位置互换　其余数位置不动，为一次对换

[定理：对换必改变排列奇偶性]

定理：在 n(n≥2) 阶排列中，奇偶排列的个数相等 ($\frac{n!}{2}$ 个)

Summary 总结

Chapter

Title 行列式 **Date** /

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

§.行列式(自学修正)

[二阶行列式] $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$,也可记为Δ, D

试用:解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

可记: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

规律: ①分母未知元系数原有相对位置排成

②分子把分母行列式中x_1, x_2系数所在位置换成2个常数项

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}$ $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$

ex: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$ $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$

解读脚标 a_{ij}

i:行,即第i横排

j:列,即第j竖列

[三阶行列式] $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

* 如何理解?

A.几何法

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - + & + & + \end{array}$$

B.降阶法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

规律: ①第一行三个元素乘以一个二阶行列式

②该二阶行列式为划去a_{ij}所在行.列后剩余4个元素保持原有相对位置

③每一项前符号: $(-1)^{i+j}$

同理可以按二.三行降阶

C. τ法

①每一项其行数i以1.2.3有序排列

②j以1.2.3组合排列 共3!项

③τ(j的逆序数) ⇒ 奇 - 偶 +

Summary 总结

三阶行列式四大基本性质

(i)若某两行/列对应元素成比例,该值为0

(ii) $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' & a_{13}+a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(iii) $\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(iv)两行(列)元素互换,值为相反数

Keywords 关键词	Notes 笔记

试用：解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

[n阶行列式] 设n^2个元素排成n行n列

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

算法：$D_n = \sum\limits_{s_1 s_2 \cdots s_n} (-1)^{\tau} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$ （工式）

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \quad \text{（余子式）}$$

n阶行列式性质

i) 行列式与转置行列式相等

ii) 对调两行/列位置，行列式呈相反数

iii) 任一行/列公因子可以提到行列式外面

iv) 若行列式某两行/列元素成比例，其值为0

v) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

vi) 将行列式任意一行/列的k倍加到另一行/列上值不变

vii) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$

分块

n阶行列式展开：

[行列式按第i行展开] $\begin{cases} \overset{\text{代余}}{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \overset{\text{余}}{M_{ij}} \\ M_{ij} \text{ 为划去 } a_{ij} \text{ 所在的 } L_i\ C_j \text{ 后的一个行列式} \end{cases}$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}$$

n阶范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

↳ 所有下标满足 $1\le i<j\le n$ 的因子 $(a_j - a_i)$ 的乘积

e.g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Summary 总结

Def. A的转置：行列互换 [即行列地位对称]

$|A| = |A^T|$

Chapter

Title 行列式

Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

§. n阶行列式(自学修证)

[n阶行列式解题思路]

利用几个性质

A. 对调两行/列位置，行列式的值相差一个负号

[两行/列相等的行列式值为0]

B. 行列式任一行/列元素的公因子可以提到行列式外面

[两行/列对应元素成比例，则行列式的值为0]

C. 行列式第i行/列每一个元素都可以表示为两数之和，则该行列式可以表示为两个行列式之和

D. 将行列式任意一行/列的k倍加到另一行/列上去，行列式的值不变

凑出：I. 上/下三角行列式

II. 两行/列成比例

[几个基本模型]

① $A=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

解：$A=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & & a_n-x \end{vmatrix}$

$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}(\frac{x}{a_i-x}) & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$=[1+\sum_{i=1}^{n}(\frac{x}{a_i-x})]\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)$

② $A=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}=0$

§. 克莱姆法则

[n元一次方程组]

$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \Rightarrow D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

[Theorem] $x_j=\frac{D_j}{D}$ (D_j为第j列元素$a_{1j}, a_{2j}\cdots$换成$b_1, b_2\cdots$) $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{2,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Summary 总结

Chapter

Title 矩阵　　Date /

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

§.矩阵

[定义] 由 $m\times n$ 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

[特殊矩阵] 1. 列矩阵：$m\times 1$　m 维列向量

$$\vec{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \vec{\alpha}=[a_1 \cdots a_n]$$

2. 行矩阵

Rem：任一个矩阵可表示为

$$A=[\vec{\beta}_1\ \ \vec{\beta}_2\ \cdots\ \vec{\beta}_n]$$

3. 对角阵　$A=(a_{ij})_{n\times n}$　（单位阵 $a_{ii}=1$ 表示为 E_n/I_n）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4. 上.下三角阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$ （下三角同理）

5. 奇异阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$　$|A|=0$　（$|A|\neq 0$ 即为非奇异阵）

§.矩阵运算

[+] $A=(a_{ij})_{m\times n}$　　①交换律

$B=(b_{ij})_{m\times n}$　　②结合律

$\Downarrow$　　③存在零元、逆元

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

[-] $A-B=A+(-B)=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$

[x] 数乘：数 k 与矩阵 A 的乘积　①结合律

$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$　②分配律

矩阵乘法：$A=(a_{ij})_{m\times k}$　$B=(b_{ij})_{k\times n}$　①结合律

则 $AB=C=(C_{ij})_{m\times n}$　②分配律

其中 $C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$

$$C_{ij}=(a_{i1}\ a_{i2}\cdots a_{ik})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

矩乘作用：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

$|A|=(a_{ij})_{m\times n}$　$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AX=B$

prof：$(AB)C=A(BC)$

$A=(a_{ir})_{m\times k}$　$B=(b_{rs})_{k\times l}$　$C=(C_{sj})_{l\times n}$

$(AB)C$ 的 (i,j) 元素：AB i 行 $\times$ C j 列

AB 的 (i,s) 元素：$\sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rs}$

$A(BC)$ 的 (i,j) 元素：A i 行 $\times$ BC j 列

BC 的 (r,j) 元素：$\sum_{s=1}^{l} b_{rs}C_{sj}$

$\Rightarrow$ $(AB)C$ 的 (i,j) 元素：$\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rs}\right)\cdot C_{sj}$ ②　$\Rightarrow$ $A(BC)$ 的 (i,j) 元素：$\sum_{r=1}^{k} a_{ir}\left(\sum_{s=1}^{l} b_{rs}C_{sj}\right)$ ①

现证② = ①即可

Keywords 关键词	Notes 笔记

[A^k] ① $A^kA^l = A^{k+l}$

② $(A^k)^l = A^{kl}$

[一些特殊] $(A+B)^2 = A(A+B) + B(A+B)$

$= A^2 + AB + BA + B^2$

$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

$|kA| = k^n|A|$

[转置] ① $(A^T)^T = A$

② $(A+B)^T = A^T + B^T$

③ $(kA)^T = kA^T$

④ $(AB)^T = B^TA^T$

prof: $(AB)^T = A^TB^T$

$A = (a_{ir})_{m\times k}$ $B = (b_{rj})_{k\times n}$

$(AB)^T$ 与 B^TA^T 是 $n\times m$ 矩阵

① $(AB)^T\ (i,j) = AB\ (j,i)$

$= \sum_{r=1}^{k} a_{jr} b_{ri}$

② $B^TA^T\ (i,j) = B^T$ i行 $\times A^T$ j列

↓ B i列 ↓ A j行

$= \sum_{r=1}^{k} b_{ri} a_{jr}$

[对称与反对称]

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ $A = A^T$ 对称

$A = -A^T$ 反对称

对称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

反对称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

① A.B对称阵 则 kA $A+B$ 对称阵

② $A = (a_{ij})_{m\times n}$ AA^T m阶对称

A^TA n阶对称

5.矩阵初等变换

[初等阵] 对单位阵经过一次初等变换得到的矩阵

$E^i(\lambda)$: 将I的第(i,i)元素1换成λ

$E^{ij}(\lambda)$: 将I的第(i,j)元素0换成λ

E^{ij}: 将I的第i行/列与第j行/列对调

[拓展] $A \xrightarrow{\lambda r_i} B = E^i(\lambda)A$

$A \xrightarrow{\lambda c_i} B = AE^i(\lambda)$

$A \xrightarrow{r_i+\lambda r_j} B = E^{ij}(\lambda)A$

$A \xrightarrow{c_j+\lambda c_i} B = AE^{ij}(\lambda)$

$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B = E^{ij}A$

$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B = AE^{ij}$

Summary 总结

Content
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Chapter

Title　　　　　　　　Date　/

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

§.矩阵简化

[阶梯阵] (i) 第二行起，每行第一个非0元的列标比上一行第一个非0元列标大

(ii) 某行是0行，则下面行全是0行

[简化阶梯阵] (iii) 每行第一个非0元均为1 且其所在列其它元均为0

[Theorem] 任一矩阵经过初等变化成为(简化)阶梯阵.

(A与B等价) A经过有限次初等变换化为B　①自反性　②对称性　③传递性

§.逆矩阵

[Def] $A \in M_{n\times n}$　$\exists B \in M_{n\times n}$　s.t. $AB=BA=I$

则A B互为逆阵，A.B均为可逆阵

Prof. 逆阵唯一性

if $AB=BA=I$　$AC=CA=I$

then $B=IB=CAB=CI=C$

[规律] $(A^{-1})^{-1}=A$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

[判断] $|A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆

§.行列式乘积法则

设 $A.B \in M_{n\times n}$ 则 $|AB|=|A|\cdot|B|$

[推论] $|A_1\cdots A_k|=|A_1|\cdots|A_k|$

Prof: 逆阵存在条件

[伴随方阵] 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

伴随余阵: $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

观察 A^*A 的 (i,j) 元素

$(A_{1i}\ A_{2i}\ A_{3i}\cdots A_{ni})\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}=\sum_{r=1}^{n}A_{ri}a_{rj}=\begin{cases} |A| & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

则 $A^*A=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|\cdot E$

若 $|A|\neq 0$ 则 $(\frac{1}{|A|}A^*)\cdot A=A(\frac{1}{|A|}A^*)=E$　$\Rightarrow$ 一定存在 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

若 $|A|=0$ 不存在

[Theorem] 设 $A\in M_{n\times n}$ 则 A可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

§.求逆阵

[Theorem] 设 $A\in M_{n\times n}$ 则以下三条等价

① A可逆　② $\exists$ 初等阵 $P_1\cdots P_s$ s.t. $P_s\cdot P_{s-1}\cdots P_2P_1A=I$　③ A可表示为有限个初等阵的乘积

构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(A|I_n)$ 若A可逆 $P_s\cdots P_2P_1(A|I_n)=(I_n|P_s\cdots P_2P_1)=(I_n|A^{-1})$

Keywords 关键词	Notes 笔记

例: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 分块矩阵

[运算规则] $A = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & P_{r1} & \cdots & P_{rs} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1s} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \cdots & Q_{rs} \end{bmatrix}$

(1) $A+B = (P_{ij}+Q_{ij})_{r\times s}$

(2) $kA = (kP_{ij})_{r\times s}$

(3) $A^T = \begin{bmatrix} P_{11}^T & P_{21}^T & \cdots & P_{r1}^T \\ P_{12}^T & P_{22}^T & \cdots & P_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{1s}^T & P_{2s}^T & \cdots & P_{rs}^T \end{bmatrix}$

(4) AB：把 P_{ij} 当作一个整体 运算法则一样

(5) $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$

[常见用法]

(1) $\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} I & O \\ O & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ CP & DP \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} I & O \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} I & P \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$

ex: $T = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$ A D 可逆 求 T^{-1}

将其改造为 $\begin{bmatrix} A & O \\ D & D \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} I & O \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ C+PA & D \end{bmatrix}$

$P = C \cdot A^{-1}$ 时:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & O \\ C\cdot A^{-1} & I \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} A & D \\ C & D \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

$(DT)^{-1} = T^{-1} D^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ C\cdot A^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

Summary 总结

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Chapter

Title 线性相关性

Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记

Review 复习记录 / / / / /

§. 向量组 线性组合（自学修正）

[线性组合] 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为 m 个 n 维向量，则其为 n 维向量的一个向量组

又设 $k_1\ k_2 \cdots k_m$ 是 m 个数

称 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 为向量组的一个线性组合

[Remark] $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$ $\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$ $\cdots$ $\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$

$$\beta = \left(\sum_{i=1}^{m} k_i a_{i1}\ \sum_{i=1}^{m} k_i a_{i2} \cdots, \sum_{i=1}^{m} k_i a_{in}\right)$$

ex: $\alpha_1 = (1,0,2,0)$ $\alpha_2 = (3,-1,0,1)$ $\alpha_3 = (0,1,-1,0)$ $\beta = (-2,3,0,-1)$

求 $k_1\ k_2\ k_3 = ?$

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 0k_3 = -2 \\ 0k_1 - k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_1 + 0k_2 - k_3 = 0 \\ 0k_1 + k_2 + 0k_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 2 \end{cases}$$

[线性相关与无关] 设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1 \sim \alpha_m$. if $\exists\ k_1 \sim k_m$ 不全为0

s.t. $k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = \vec{0}$

则称 $\alpha_1 \sim \alpha_m$ 线性相关

[Prop] (1) 包含 $\vec{0}$ 向量组必定线性相关

(2) 包含两个相等/平行向量的向量组必定线性相关

(3) 向量组一部分线性相关则整体相关　　部分相关 → 整体相关　　* 缩短向量不改变相关性

(4) 向量组整体线性无关则其一部分无关　　整体无关 → 部分相关　　* 延长向量不改变无关性

[判断] 线性相关 $\Leftrightarrow$ m 个向量中必有一个是其余 m-1 个向量的线性组合

几何意义: 以三维向量为例

(i) α, β 相关 $\Leftrightarrow$ 共线

α, β 无关 $\Leftrightarrow$ 不共线

(ii) α, β, γ 相关 $\Leftrightarrow$ 共面

[矩阵的行/列向量] $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ 其中 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2} \cdots a_{ij} \cdots a_{in})$

or $A = [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n]$ 其中 $\beta_j = (a_{1j}, \cdots a_{mj})^T$

[行/列向量相关] (i) 行相关: $\exists X = [x_1\ x_2 \cdots x_n]$ $X \neq 0$

s.t. $X \cdot A = 0$

$$[x_1\ x_2 \cdots x_m]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = 0$$

列相关: $\exists X = [x_1\ x_2 \cdots x_m]^T$ $X \neq 0$

s.t. $A \cdot X = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

(ii) 行列式: 行列相关 $\Leftrightarrow |A| = 0$

[Prop] (1) n+r 个 n 维向量必线性相关

(2) n 维向量组 $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_r$ 可由向量组 $\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_s$ 表示 若 $r > s$ 则 ε 相关

$\Rightarrow \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ 可由 $\eta_1 \cdots \eta_s$ 表示 但 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关 $\Rightarrow r \le s$

Summary 总结

Chapter

Title　　Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记 　　Review 复习记录 / / / / /

§. 秩

[Def. 向量组等价] 若 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 可由 $\beta_1 \sim \beta_s$ 线性表示 且 $\beta_1 \sim \beta_s$ 可由 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 线性表示

则 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 与 $\beta_1 \sim \beta_s$ 等价　(i) 自反性　(ii) 对称性　(iii) 传递性

[Theo] 设 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 等价，线性无关，则 $r=s$

[Def: 极大无关组] 设 S 是一个向量组，M 是 S 中 r 个线性无关向量组成的部分组，把 S 中任一其他向量加到 M 中

则线性相关，则称 M 为 S 的一个极大(线性)无关组。

[Prop] (i) 任一极大无关组与向量组本身等价

(ii) 在一向量组中任意两个极大无关组所含向量个数相同

[Def: 向量的秩] 向量组极大无关组中所含向量的个数

[Theo] 设 S_j 的秩为 r_j　$j=1,2$

(i) 若 S_1 由 S_2 线性表示 则 $r_1 \le r_2$

(ii) 若 S_1 与 S_2 等价 则 $r_1 = r_2$

Prof (i) 设 M_i 为 S_i 的一个极大无关组

$M_1 \Leftrightarrow S_1$　$M_2 \Leftrightarrow S_2$

$\Rightarrow M_1$ 可由 M_2 表示

且 M_1 为无关组

$\Rightarrow r_1 \le r_2$

[Def: 矩阵的秩] 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$　$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = (B_1, B_2 \cdots B_n)$

其中 $A_i = (a_{i1}, a_{i2} \cdots a_{in})$　$B_j = (a_{1j}\ a_{2j} \cdots a_{mj})^T$

① 矩阵的行秩：矩阵行向量组 $(A_1\ A_2 \cdots A_m)$ 的秩

② ⋯⋯列秩：⋯列⋯⋯ $(B_1\ B_2 \cdots B_n)$ 的秩

③ 矩阵的秩：[interlude. K阶子式] 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任选 K 行 K 列，在这些选定行列交点中的 K^2 个元素按原顺序排列

最高阶非 0 子式的阶数 (记作 rank(A))

结论汇总：

1. $n+r$ 个 n 维向量线性相关
2. $\xi_1 \sim \xi_r$ 可由 $\eta_1 \sim \eta_s$ 线性表出且 $r>s$ 则 $\xi_1 \sim \xi_r$ 线性相关
3. S_1 可由 S_2 线性表出，则 $r(S_1) \le r(S_2)$
4. A: $\alpha_1 \sim \alpha_s$ 线性无关

   $K \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{bmatrix}$ 则 $|K| \ne 0 \Leftrightarrow$ B 线无
5. 秩的不等式链条

   $r(A),\ r(B),\ r(A+B) \le r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix},\ r(A,B) \le r(A)+r(B) \le r(AB)+n \le r(A)+n,\ r(B)+n$

[Theo] A 的秩 = A 的行秩 = A 的列秩

Prof: $A \ne 0$　A 的秩为 r $\Rightarrow \exists$ A 的一个 r 阶子式非 0　r+1 阶子式全为 0

只证 r = A 的列秩 即可

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ 不妨设这个非 0 r 阶子式在前 r 列

Step 1

$$D = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & \cdots & a_{i_r r} \end{bmatrix} \ne 0$$ $\Rightarrow$ D 的 r 个列向量线性无关 ($|D| \ne 0$)

A 的前 r 列是 D 中列向量的延长 $\Rightarrow$ 不影响无关性 $\Rightarrow$ A 的前 r 个列向量线性无关

Step 2

现证 α_j　$r+1 \le j \le n$ 可由 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 线性表示

考虑 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ \vdots \\ a_{i_r j} \end{pmatrix}$　β_j 与 $\beta_1 \sim \beta_r$ 必线性相关

$\exists\ L_1\ L_2 \cdots L_r\ K$ 不全为 0　$L_1\beta_1 + L_2\beta_2 + \cdots + L_r\beta_r + K\beta_j = 0$　且 $K \ne 0$

$\Rightarrow \beta_j = -\frac{L_1}{K}\beta_1 - \frac{L_2}{K}\beta_2 - \cdots - \frac{L_r}{K}\beta_r$

对 A 初等变换：$\alpha_j + \frac{L_1}{K}\alpha_1 + \cdots + \frac{L_r}{K}\alpha_r = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{i_1 j} \\ \vdots \\ b_{i_r j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$　其中 $b_{i_1 j} = \cdots = b_{i_r j} = 0$

现证明 $b_{ij} = 0$　$i \ne i_1, i_2 \cdots i_r$

Keywords 关键词	Notes 笔记

取A的 $i_1 \sim i_r$ 行及第 i 行

取A的 $1 \sim r$ 列及第 j 列

$$D' = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 r} & a_{i_1 j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i_r 1} & \cdots & a_{i_r r} & a_{i_r j} \\ a_{i1} & \cdots\cdots & & a_{ij} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 r} \\ a_{i_1 j} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_r j} & a_{i_r 1} & \cdots & a_{i_r r} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 + \frac{l_1}{k}c_2 + \frac{l_2}{k}c_3 + \cdots + \frac{l_r}{k}c_{r+1}} \begin{bmatrix} a_{ij} + \frac{l_1}{k}a_{i1} + \cdots + \frac{l_r}{k}a_{ir} & a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 r} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{i_r 1} & \cdots & a_{i_r r} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} (a_{ij} + \frac{l_1}{k}a_{i1} + \cdots + \frac{l_r}{k}a_{ir}) \cdot D = 0$$

$D \neq 0$

$\Rightarrow a_{ij} + \cdots = 0$

$\Rightarrow b_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \alpha_j = k_1'\alpha_1 + \cdots + k_r'\alpha_r$ 证毕

[Theo] 矩阵初等变换不改变矩阵的秩

[Theo] 对A作初等行变换化为阶梯形阵B

$r(A) = r(B) =$ B中非0行个数

* 行变换不改变列向量线性关系
* 列 行

A向量组可用B向量组表示，则 $r(A) \leq r(B)$

[Prop] (1) 设 A B 行数相同 则 $r(A) \leq r(A,B) \leq r(A) + r(B)$

$\to r(A,B) \leq r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

(2) 设 P Q 列数相同 则 $r(P) \leq r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \leq r(P) + r(Q)$

(1)*(2)* A, B 行列数相同 $r(A+B) \leq \begin{cases} r(A,B) \leq r(A) + r(B) \\ r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \end{cases}$

(3) 设 $A \in M_{p \times n}$ $B \in M_{t \times m}$

$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$

Prof: $r(A) = r$ $r(B) = s$

A B 存在 r / s 阶非0子式 $|A_1|$ $|B_1|$

$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix} = |A_1||B_1| \neq 0$ 是 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的 r+s 阶非0子式

现证 $\begin{array}{c} p \\ t \end{array}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的 r+s+1 阶子式 = 0

1° 前 p 行选 r+1 行 r+s+1 阶子式 = 0

2° 后 t 行选 r+1 行 亦同 证毕

(4) 设 $A \in M_{s \times n}$ $B \in M_{n \times m}$

$r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A)\ r(B)\}$

Prof: $r(A) = r$ $\exists$ 可逆 $P \in M_{s \times s}$ $Q \in M_{n \times n}$

$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$AB = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB$ 令 $QB = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$ $G \in M_{r \times m}$ $H \in M_{(n-r) \times m}$

$= P\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$

$r(AB) = r(P\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}) = r\begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} = r(G) \leq r = r(A)$

$r(AB) = r(G) \leq r\begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} = r(QB) = r(B)$

[不等式链]

$r(A). r(B) \leq r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $r(A,B)$

$\leq r(A) + r(B) \leq r(AB) + n$

$\leq r(A). r(B) + n$

$r(B) = r(QB) = r\begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} \leq r(G) + r(H) \leq r(AB) + n - r = r(AB) + n - r(A)$

(5) 设 $A \in M_{p \times n}$ $B \in M_{t \times m}$ $C \in M_{t \times n}$

$r(A) + r(B) \leq r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \leq r(A) + r(B) + r(C)$

ex $A \in M_{n \times n}$ $A^2 = I$ 求证: $r(A+I) + r(A-I) = n$

1° $r(A+I) + r(A-I) \leq r(\underbrace{(A+I)\cdot(A-I)}_{A^2 - I^2 = 0}) + n = n$

2° $r(A+I) + r(A-I) \geq r(A+I+A-I) = r(2A) = r(A) = n$ $(|A| \neq 0)$

Summary 总结

[A*] $A \in M_{n \times n}$

$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$

Prof: 1° $r(A) = n \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A^*| \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = n$

2° $r(A) < n-1 \Rightarrow A\ \forall\ n-1$ 阶子式为0

n-1阶子式取 i 行 j 列 $\Rightarrow A_{ij} = 0$

$A^* = 0 \Rightarrow r(A^*) = 0$

3° $r(A) = n-1 \Rightarrow |A| = 0$

$r(A) + r(A^*) \leq n + r(A^*A) = n \Rightarrow r(A^*) \leq 1$

$r(A) = n-1 \Rightarrow A^* \neq 0 \Rightarrow r(A^*) \geq 1$

$\exists$ 一个 $A_{ij} \neq 0$

Chapter

Title 利用矩阵讨论线性方程组的解 Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

§.导论

考虑 m个方程 n个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad ①$$

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$

$B = [A, b]$ 为①的增广矩阵

[方程组行变换]	[增广矩阵初等行变换]
(i) $\lambda \neq 0$ 乘以某方程	$\Leftrightarrow \lambda L_i$
(ii) 一个方程 λ 倍加到另一个方程	$\Leftrightarrow L_i + \lambda L_j$
(iii) 互换方程位置	$\Leftrightarrow L_i \leftrightarrow L_j$

§.高斯消元法

$B \xrightarrow{\text{行变换}} B_0$(简化阶梯阵) 以得①解

ex $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}L_3]{-\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B_0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = t \\ x_1 = 2 - t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 - t \end{cases} \quad t \in R$$

[方程的存在性]

Theorem1 方程组①有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

Theorem2 $r(A) = r(B) = n$ 时 唯一解

$r(A) = r(B) < n$ 时 无穷解

Prof 1. 1° $r(A) \le r(A, b) = r(B)$

B 行变换为 B_0 则 $A \to A_0$

2° "⇒" if $r(A) < r(B)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$r(A_0) < r(B_0)$

A_0非零行 < B_0非零行

$B_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & * & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \end{array}\right]$ 存在方程: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = d_{r+1} \neq 0$

⇒ 方程①无解

故 if ①有解 $r(A) = r(B)$

3° "⇐" if $r(A) = r(B) = r$

调换 B_0 前 n 列次序 s.t. B_0 左上角为 r 阶单位阵 (改变未知量顺序)

$B_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & * & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & d_r \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$ 对应方程组 $\begin{cases} x_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_r \\ \vdots \\ x_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e_{11}x_{r+1} + \cdots + d_1 \\ \vdots \\ x_r = e_{r1}x_{r+1} + \cdots + d_r \end{cases}$

$x_{r+1} \sim x_n$ 为自由未知量，有解

Prof 2: $r(A) = r(B) = n$ 无自由未知量 唯一

$r(A) = r(B) < n$ 至少一个自由未知量 无穷

Keywords 关键词 | Notes 笔记

ex $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+ay=1 \end{cases}$ $a=?$ s.t. 唯一 无解 无穷

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

1° $a \neq 1$ $a \neq -2$ $|A| \neq 0$ $r(A)=3 \Rightarrow r(A) \le r(B) \le 3 \Rightarrow r(A)=r(B)=3$ 唯一

2° $a=1$ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $r(A)=1$

$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $r(B)=1$

$\Rightarrow r(A)=r(B)=1<3$ 无穷

3° $a=-2$ $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $r(B)=3$

$\Rightarrow r(A) < r(B) = 3$ 无解

§.齐次方程组

[Theorem] 齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

Prof: $r(A)=r(B)$

if $r(A)=r(B)=n$ 则 ①有唯一解 $\Rightarrow x_i=0$

if $r(A)<n$ ②无穷解 $\Rightarrow \exists x_i \neq 0$

[Prop 1] 若 $m<n$ 则有非0解　Prof: $r(A) \le m < n$

若 $m=n$ 则有非0解 $\Leftrightarrow |A|=0$　Prof: $|A|\neq 0$ $r(A)=n$

$|A|=0$ $r(A)<n$

ex $\begin{cases} (\lambda+4)x+y+2z=0 \\ (\lambda+1)x+\lambda y+z=0 \\ 3(\lambda+2)x+(\lambda+1)y+(\lambda+4)z=0 \end{cases}$ ∃非0解 求λ

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 1 & 2 \\ \lambda+1 & \lambda & 1 \\ 3(\lambda+2) & \lambda+1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2$$

1° $\lambda=0$

$B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=2x_3 \end{cases}$ x_3自由未知量

2° $\lambda=-1$

$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$ x_3自由未知量

§.解的结构

[解向量] $x=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$　$Ax=b$　$Ax=0$ 称为 $Ax=b$ 的导出方程组

$Ax=0$ 解集为 Γ

齐次部分

[Prop1] if $\alpha,\beta \in \Gamma$ 则 $\alpha+\beta \in \Gamma$

Prof: $A\alpha=0$ $A\beta=0$ $A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0$

if $k\in R$ $\alpha\in\Gamma$ 则 $k\alpha \in \Gamma$

Prof: $A\alpha=0$　$kA\alpha=A(k\alpha)=0$

[Def] $Ax=0$ 的解集 Γ 的任一极大无关组为 $Ax=0$ 的一个基础解系

非齐次部分

[Prop2] (i) $Ax=b$ 两解之差为 $Ax=0$ 的解

Prof: $Ax_1=b$　$Ax_2=b$　$Ax_1-Ax_2=A(x_1-x_2)=b$

(ii) $Ax=b$ 一解与 $Ax=0$ 一解之和为 $Ax=b$ 的解

[Theorem] 已知 β 为 $Ax=b$ 一个特解 且 $\alpha_1 \sim \alpha_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系

则 $x=\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$

Prof: 1° 由性质2 x 为 $Ax=b$ 中一个解

2° 设 γ 为 $Ax=b$ 的 ∀ 解

Keywords 关键词 | Notes 笔记

$\gamma-\beta$ 为 $Ax=0$ 的解

$\exists k_1' \cdots k_s'$ s.t. $\gamma-\beta = k_1'\alpha_1 + \cdots + k_s'\alpha_s$

$\gamma = \beta + k_1'\alpha_1 + \cdots + k_s'\alpha_s$

§.求解系

\# 设 $r(A) = r < n$

$A \xrightarrow{\text{行变换 列互换}} A_0 = \begin{bmatrix} I & * \\ & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots \\ \vdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots \end{cases}$ $x_{r+1} \sim x_n$ 自由未知量

取 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots x_n) = (1, 0, \cdots, 0)$

$(\cdots) = (0, 1, \cdots, 0)$

$\vdots$

$(\cdots) = (0, 0, \cdots, 1)$

则 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ $\alpha_{n-r} = \begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ \vdots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 得到 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个解

1° 证 $\alpha_1 \sim \alpha_{n-r}$ 线性无关

$D = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_{n-r})$ 有 1 个 $n-r$ 阶非 0 子式 I_{n-r}

$\Rightarrow r(D) = n-r \Rightarrow$ 列向量秩为 $n-r \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_{n-r}$ 线性无关

2° 证 其它解可由 $\alpha_1 \sim \alpha_{n-r}$ 表示

设 $\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的任一解

其中 $x_{r+1} = k_1,\ x_{r+2} = k_2, \cdots x_n = k_{n-r}$

$x_i = -c_{i,r+1}k_1 - c_{i,r+2}k_2 - \cdots - c_{in}k_{n-r}$ $(i = 1, 2 \cdots r)$

则 $\beta = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r} \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$

[Theorem] 设 $r(A) = r < n$ 则 $Ax=0$ 有基础解系.其基础解系中有 $n-r$ 个向量

[Theorem] $Ax=0$ 系数矩阵的秩与基础解系中向量个数之和为 n

ex $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 \\ x_4 = -3x_2 - 2x_3 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

则其通解: $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ $(\forall k_1 k_2 \in R)$

Summary 总结

ELEYANG DESIGN

7

Content

内容

【线性代数】【线性空间与欧氏空间】【线Ⅲ】

Review

复习记录

/ / / / /

Chapter Ⅲ

Title 线性空间   Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记 Review 复习记录 / / / / /

- 线性空间
- 维数、基、坐标
- 坐标变换
- 子空间

§. 线性空间

▶ **线性空间** 例 $\mathbb{R}^n$: $(a_1, a_2, \cdots a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ $k(a_1, \cdots, a_n)$

▶ **Def** 设 V 为一个非空集合 $\mathbb{P}$ 为一个数域

现定义 ①加法: $\forall \alpha, \beta \in V$ $\exists!\, \gamma \in V$ s.t. $\gamma = \alpha + \beta$

②数乘: $\forall k \in \mathbb{P}$ $\forall \alpha \in V$ $\exists!\, \delta \in V$ s.t. $\delta = k\alpha$

其满足八大规则 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ $k, l \in \mathbb{P}$

(i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (v) $1\alpha = \alpha$

(ii) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (vi) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(iii) $\exists$ 零元 0: $\forall \alpha \in V$ $0 + \alpha = \alpha$ (vii) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

(iv) $\exists$ 负元: $\forall \alpha \in V$ $\exists \beta \in V$ s.t. $\alpha + \beta = 0$ (viii) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

则称 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间   线性空间的验证思路: ①加法: 交换、结合 ②0元 负元 ③数乘: 1、结合律、分配律

$\underset{2}{}$ + $\underset{2}{}$ + $\underset{4}{}$

▶ **Prop** (i) 0元素唯一   Prof: $\left.\begin{array}{l}\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 \\ \vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{0}_1 = \vec{0}_2$

(ii) 负元素唯一   Prof: $\beta = \beta + \vec{0} = \beta + (\alpha + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma = \vec{0} + \gamma = \gamma$

(iii) $0\alpha = \vec{0}$ $(-1)\alpha = -\alpha$ $k\vec{0} = \vec{0}$

Prof: $\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha$
$\Rightarrow -\alpha + \alpha + 0\alpha = -\alpha + \alpha = \vec{0}$
$\Rightarrow 0\alpha = \vec{0}$

Prof: $(-1)\alpha + \alpha = (-1)\alpha + 1\alpha = 0\alpha = \vec{0}$
$\Rightarrow (-1)\alpha + \vec{0} = \vec{0} + (-\alpha)$
$\Rightarrow (-1)\alpha = -\alpha$

(vi) if $k\vec{\alpha} = 0$ then $k = 0$ or $\vec{\alpha} = 0$

§. 维.基.坐标

▶ **维数.基.坐标**

线性组合 [Def] 设 V 为 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\alpha_1 \sim \alpha_r \in V$ $k_1 \sim k_r \in \mathbb{P}$

则称 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r$ 为 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 的一个线性组合

α 可由 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 线性表出

等价 [Def] $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 与 $\beta_1 \sim \beta_r$ 可相互表示 则称 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 与 $\beta_1 \sim \beta_s$ 等价

线性无关 [Def] $\exists\, k_1 \sim k_r \in \mathbb{P}$ 不全为0 s.t. $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$

则称 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 线性相关, 反之线性无关

[维数] 设 V 中有最多 n 个线性无关的元素, 则称 V 为 n 维, 记作 $\dim(V) = n$

[基] 在 n 维线性空间 V 中, n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 称为 V 的一组基 (basis)

[Prop] 设 $\alpha \in V$ 则 $\exists$ 唯一 $a_1 \sim a_n$ s.t. $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$

[坐标] $a_1 \sim a_n$ 称为 α 在 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 基下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 坐标唯一性

[Theorem] 设 V 中有 n 个线性无关向量 $\alpha_1 \sim \alpha_n$ 且 V 中 $\forall$ 向量可由 $\alpha_1 \sim \alpha_n$ 线性表出, 则 $\dim(V) = n$ $\alpha_1 \sim \alpha_n$ 为 V 的一组基

[例] 求 $V(\mathbb{P}[x]_n)$

$1, x, x^2 \cdots x^{n-1}$ 线无

$\Rightarrow \dim(\mathbb{P}[x]_n) = n$

$1, x \cdots x^{n-1}$ 为一组基

§. 坐标变换

[基变换与坐标变换]

设 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 和 $\varepsilon_1' \sim \varepsilon_n'$ 为 V 两组基, $\alpha \in V$

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$
$\quad = x_1'\varepsilon_1' + \cdots + x_n'\varepsilon_n'$

设 $\begin{cases} \varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \quad\vdots \\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1' \\ \vdots \\ \varepsilon_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$

$\Downarrow$
A (且 A 可逆, Prof 略)

则 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $[\varepsilon_1', \cdots, \varepsilon_n'] = [\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n]A$

* 引入记号 $k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n \triangleq (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ "$\triangleq$": 定义

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $B = (b_{ij})_{n\times m}$

(i) $((\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)A)B = (\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)AB$

(ii) if $n = m$

$(\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)A + (\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)B = (\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)(A+B)$

(iii) $(\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n)A + (\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_n)A = [\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n]A$

过渡矩阵第 i 列为 ε_i' 在 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下坐标

Keywords 关键词	Notes 笔记

则根据 * 定义

$$\alpha = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots \varepsilon_n')\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

§. 线性子空间

▶ 子空间 例 $\mathbb{R}^2$ 系中 任意过原点直线为 $\mathbb{R}^2$ 线性子空间

▶ Def $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 中非空子集合 W 称为 V 的一个线性子空间

if W 按 V 上加法、数乘构成 $\mathbb{P}$ 上一个线性空间

条件: (i) $\forall \alpha, \beta \in W \quad \alpha+\beta \in W$

(ii) $\forall k \in \mathbb{P} \quad \alpha \in W \quad k\alpha \in W$

$\Rightarrow k\alpha + l\beta \in W$ 因此只需验证 $k\alpha + l\beta \in W$

▶ Theorem 设 $\emptyset \neq W \subset V$ if 加法、数乘封闭 则 W 为 V 的一个子空间

$\{0\}$ 为 V 的平凡子空间

$\begin{cases} 1^\circ \ W \neq \emptyset \\ 2^\circ \ k\alpha + l\beta \in W \end{cases}$

▶ 子空间生成 $\alpha_1 \sim \alpha_r \in V$ 则 $L(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r) \triangleq \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r \mid k_1 \sim k_r \in \mathbb{R}\}$ 称为由 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 生成的子空间

(i) 设 W 为 V 的一个子空间, $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 为 W 一组基 则 $W = L(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$

[Prof] "$\Rightarrow$" $\alpha \in L(\alpha_1, \cdots \alpha_r)$
则 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r \in W \Rightarrow L \subset W$
"$\Leftarrow$" $\alpha \in W$ $\quad L = W$
则 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r \in L \Rightarrow W \subset L$

(ii) $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 与 $\beta_1 \sim \beta_s$ 生成相同子空间

$\Leftrightarrow \alpha_1 \sim \alpha_r$ 与 $\beta_1 \sim \beta_s$ 等价

(iii) $\dim(L(\alpha_1 \sim \alpha_r)) = r(\alpha_1 \sim \alpha_r)$

[Prof] if $L(\alpha_1 \sim \alpha_r) = L(\beta_1 \sim \beta_s)$
则 $\alpha_i \in L(\beta_1 \sim \beta_s) \quad \beta_i \in L(\alpha_1 \sim \alpha_r)$
$\Rightarrow \alpha\ \beta$ 互相表示

[Prof] if $\alpha_1 \sim \alpha_r \Leftrightarrow \beta_1 \sim \beta_s$
$\alpha \in L(\alpha_1 \sim \alpha_r) \Rightarrow \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = l_1\beta_1 + \cdots + l_s\beta_s$
$\Rightarrow \alpha \in L(\beta_1 \sim \beta_r)$ 同理 $\beta \in L(\alpha_1 \sim \alpha_s)$

[Prof] 设 $r(\alpha_1 \sim \alpha_r) = p$ 且 $\alpha_1 \sim \alpha_p$ 为 $\alpha_1 \sim \alpha_r$ 的极大无关组 则 $\alpha_1 \sim \alpha_p \Leftrightarrow \alpha_1 \sim \alpha_r$
$\Rightarrow L(\alpha_1 \sim \alpha_p) = L(\alpha_1 \sim \alpha_r)$
且 $\dim(L(\alpha_1 \sim \alpha_p)) = p$
$\Rightarrow \dim(L(\alpha_1 \sim \alpha_r)) = p$

▶ [基扩充定理] 设 W 是 V 的子空间, 且 $\dim W = r$ $\quad \alpha_1 \sim \alpha_r$ 为 W 一组基

则在 V 中 $\exists$ $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1} \cdots \alpha_n$ s.t. $\alpha_1 \sim \alpha_n$ 为 V 的一组基.

Summary 总结

Chapter

Title 线性空间

Date /

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

- 子空间的交&和
- 直和

§. 子空间的交与和

[Theorem] 设 $V_1\ V_2$ 为 V 两个子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间

prof: $0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2$ 非空

$\forall \alpha\ \beta \in V_1 \cap V_2 \quad \alpha, \beta \in V_1 \quad \alpha\ \beta \in V_2$

$\Rightarrow k\alpha + l\beta \in V_1 \quad k\alpha + l\beta \in V_2$

$\Rightarrow k\alpha + l\beta \in V_1 \cap V_2$

Example: $L(\alpha_1 \sim \alpha_r) + L(\beta_1 \sim \beta_s)$

$= L(\alpha_1 \sim \alpha_r, \beta_1 \sim \beta_s)$

Prof: $\forall \alpha \in L(\alpha_1 \sim \alpha_r) + L(\beta_1 \sim \beta_s)$

$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r + l_1\beta_1 + \cdots + l_s\beta_s$

$\in L(\alpha_1 \sim \beta_s)$

反证 略

[Theorem] 设 $V_1\ V_2$ 是 V 子空间 则 $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间

prof: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_1 \in V_1 \quad \alpha_2 \in V_2$

$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad \beta_1 \in V_1 \quad \beta_2 \in V_2$

$k\alpha + l\beta = \underset{\underset{V_1}{\cap}}{(k\alpha_1 + l\beta_1)} + \underset{\underset{V_2}{\cap}}{(k\alpha_2 + l\beta_2)}$

$k\alpha + l\beta \in V_1 + V_2$

[维数公式] $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

Prof: 设 $\dim V_i = n_i \quad \dim(V_1 \cap V_2) = m$

设 $V_1 \cap V_2$ 基为 $\alpha_1 \sim \alpha_m$

$\alpha_1 \sim \alpha_m \xrightarrow{扩充} \alpha_1 \sim \alpha_m\ \beta_1 \sim \beta_{n_1-m}$ 为 V_1 基

$\xrightarrow{扩充} \alpha_1 \sim \alpha_m\ \gamma_1 \sim \gamma_{n_2-m}$ 为 V_2 基

$V_1 = L(\alpha_1 \sim \beta_{n_1-m}) \quad V_2 = L(\alpha_1 \sim \gamma_{n_2-m})$

$V_1 + V_2 = L(\underset{m}{\alpha}, \underset{n_1-m}{\beta}, \underset{n_2-m}{\gamma})$ 现证 $\alpha\ \beta\ \gamma$ 线性无关

$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + l_1\beta_1 + \cdots + l_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$

令 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + l_{n_1-m}\beta_{n_1-m} \in V_1$

$= -q_1\gamma_1 + \cdots - q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} \in V_2$

$\alpha \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \alpha = p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m$

$\alpha_1 \sim \alpha_m$ 与 $\gamma_1 \sim \gamma_{n_2-m}$ 线无 $\therefore p_1\alpha_1 + \cdots + p_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$

$\Rightarrow p_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0$ 同理 $l = 0 \Rightarrow k = 0$

$q = p = l = 0 \Rightarrow$ 线无 证毕

[Prop] (i) $\dim V_1 + \dim V_2 > n$ 则 $V_1 \cap V_2$ 含非0元

§. 直和

[Def] $V_1\ V_2 \subseteq V$ if $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ 唯一 [即直接加和]

则称 $V_1 + V_2$ 为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$ 直观理解：V_1 基与 V_2 基线性无关

[Theorem] $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \vec{0}$ 分解唯一 $\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Prof: 1° $\Rightarrow$ 显然

2° $\Leftarrow$ $\alpha \in V_1 + V_2$ 且 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

if $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

$\vec{0} = \underset{\underset{V_1}{\cap}}{(\alpha_1 - \beta_1)} + \underset{\underset{V_2}{\cap}}{(\alpha_2 - \beta_2)}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2$

Prof: 1° $\Rightarrow$ 设 $\alpha \in V_1 \cap V_2 \quad \alpha \in V_1 \quad \alpha \in V_2$

$-\alpha \in V_1 \quad -\alpha \in V_2$

$0 = \underset{\underset{V_1}{\cap}}{\alpha} + \underset{\underset{V_2}{\cap}}{(-\alpha)}$ 0 分解唯一 $\Rightarrow \alpha = 0$

[Theorem] 设 $W = V_1 + V_2$ 则 $W = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \dim W = \dim V_1 + \dim V_2$

$\dim W = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

[Theorem] 设 U 为 V 子空间 $\exists V$ 另一子空间 W s.t. $V = U \oplus W$

Summary 总结

Chapter

Title 线性变换 **Date** /

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

- 线性变换
- 线性变换与矩阵
- 矩阵相似

§. 线性变换

▶ [线性空间的同构]

设 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 为V的一组基 $\forall \alpha \in V \ \exists ! (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{P}^n$ s.t. $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$

ex 投影 双射

构造映射 $\sigma: V \to \mathbb{P}^n$ $\alpha \to (a_1 \cdots a_n)$

设 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ $\beta = b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n$

满足 $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$ 则 σ 为线性映射

[Def] $\mathbb{P}$ 上 V_1 与 V_2 同构 if $\exists V_1$ 到 V_2 的双射 τ s.t.

(i) $\tau(\alpha+\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$

(ii) $\tau(k\alpha) = k\tau(\alpha)$ 线性且双射

[Prop] (i) $\mathbb{P}$ 上 n 维空间与 $\mathbb{P}^n$ 同构

(ii) $\mathbb{P}$ 上两个有限维空间同构 <=> 维数相同

▶ [线性变换] 变换: $V \to V'$ 的映射

[Def] V 的一个变换 T 称为线性变换

if $\forall \alpha, \beta \in V$ $\forall k \in \mathbb{P}$ 线性 / 不要求双射

(i) $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$ (ii) $T(k\alpha) = kT(\alpha)$

=> $\xi = k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n$ 则 $T(\xi) = T(k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n) = k_1T\varepsilon_1 + \cdots + k_nT\varepsilon_n$

恒等变换 $\mathcal{E}(\alpha) = \alpha$

零变换 $\mathcal{O}(\alpha) = 0$

数乘变换 $\mathcal{K}(\alpha) = k\alpha$

[Prop] (i) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

(ii) $T(-\alpha) = -T(\alpha)$

引入记号: $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{E}$ $\mathcal{K}$ $\mathcal{O}$

[Prop] 设 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$ 则 $T(\beta) = k_1T\alpha_1 + \cdots + k_nT\alpha_n$

$\alpha_1 \sim \alpha_n$ 线性相关 则 $T\alpha_1 \sim T\alpha_n$ 线性相关 [此结论对线性无关无效]

▶ [线性变换运算] $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ 为V上两个线性变换

× 定义 $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha))$ $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 也为线性变换 [Prop] $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$

prof: $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha+\beta)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(\beta)) = \mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{A}\mathcal{B}(\beta)$

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(k\alpha) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(k\alpha)) = \mathcal{A}(k\mathcal{B}(\alpha)) = k\mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)) = k(\mathcal{A}\mathcal{B})(\alpha)$

[Remark] 一般地, $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$

ex: $\mathcal{A}(f(x)) = f'(x)$ $\mathcal{A}\mathcal{B}(f(x)) = \mathcal{A}(\int_0^x f(t)dt) = f(x)$

$\mathcal{B}(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$ $\mathcal{B}\mathcal{A}(f(x)) = \mathcal{B}(f'(x)) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$

+ 定义 $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)$ $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 也为线性变换 [prop] $\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$ $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$

prof: $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha+\beta) + \mathcal{B}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta) + \mathcal{B}(\beta) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha) + (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\beta)$

− 定义 $(-\mathcal{A})(\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$ $-\mathcal{A}$ 也为线性变换

prof: $(-\mathcal{A})(\alpha+\beta) = -\mathcal{A}(\alpha+\beta) = (-1)[\mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)] = -\mathcal{A}(\alpha) + (-\mathcal{A}(\beta)) = (-\mathcal{A})(\alpha) + (-\mathcal{A})(\beta)$

× 定义 $k\mathcal{A} = \mathcal{K}\mathcal{A}$ 即 $(k\mathcal{A})(\alpha) = (\mathcal{K}\mathcal{A})(\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha)$ $k\mathcal{A}$ 也为线性变换

▶ [Theorem] $L(V) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ 是 V 的线性变换$\}$ $L(V)$ 为线性子空间

if $\exists \mathcal{B}$ s.t. $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$ 则称 $\mathcal{A}$ 可逆 $\mathcal{A}^{-1} \in L(V)$

§. 线性变换的矩阵

▶ [Def] 设 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为V的一组基, $\mathcal{A} \in L(V)$

$\forall \xi \in V$ $\xi = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$ $\mathcal{A}\xi = x_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + \cdots + x_n\mathcal{A}\varepsilon_n$

设 $\mathcal{A} \in L(V)$ 且 $\mathcal{A}\varepsilon_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n$

$\mathcal{A}\varepsilon_2 = a_{12}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n$

$\vdots$

$\mathcal{A}\varepsilon_n = a_{1n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n$

$T\varepsilon_1$ 在 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下坐标

即 $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \triangleq (\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

记 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

即 ξ 在 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 下坐标 = $T\xi$ 在 $T\xi_1 \cdots T\xi_n$ 下坐标

[prop] if $\mathcal{A}$ $\mathcal{B} \in L(V)$ 且 $\mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{B}\varepsilon_i$ 则 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ $\mathcal{A} \to !\mathcal{A}$

[prop] $\forall \alpha_1 \cdots \alpha_n \in V$ $\exists ! \mathcal{A} \in L(V)$ s.t. $\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i$ $\mathcal{A} \to !\mathcal{A}$

Prof 1:

$\forall \xi \in V$ $\xi = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$

$\mathcal{A}\xi = x_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + \cdots + x_n\mathcal{A}\varepsilon_n$

$= x_1\mathcal{B}\varepsilon_1 + \cdots + x_n\mathcal{B}\varepsilon_n = \mathcal{B}\xi$

Prof 2: 思路分析: 定义一个 $\mathcal{A}$

对 $\forall \xi \in V$ $\xi = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$

则定义 $\mathcal{A}\xi = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$

显然 $\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i$ s.t. $\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i$

$\forall \alpha, \beta \in V$ 再证明 $\mathcal{A}$ 为线性

$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$

$\beta = b_1\varepsilon_1 + \cdots + b_n\varepsilon_n$

则 $\alpha + \beta = (a_1+b_1)\varepsilon_1 + \cdots + (a_n+b_n)\varepsilon_n$

$k\alpha = ka_1\varepsilon_1 + \cdots + ka_n\varepsilon_n$

$\mathcal{A}(\alpha+\beta) = (a_1+b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_n+b_n)\alpha_n$

$= a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$

$= \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta)$

$\mathcal{A}(k\alpha) = k(a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n) = k\mathcal{A}(\alpha)$

=> $\mathcal{A} \in L(V)$ $\mathcal{A}\varepsilon_i = \alpha_i$

Keywords 关键词	Notes 笔记

§. 矩阵相似

▶ [Def] 构造 $\sigma: L(V) \to M_{n\times n}(P)$ 即 $\forall \mathcal{A} \to ! A$，则 σ 为一个双射

σ 满足以下性质：(i) $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})$　　即 $\mathcal{A}+\mathcal{B} \to A+B$

(ii) $\sigma(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A})\sigma(\mathcal{B})$　　$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} \to AB$

(iii) $\sigma(k\mathcal{A}) = k\,\sigma(\mathcal{A})$　　$k\cdot\mathcal{A} \to kA$

(iv) $\mathcal{A}$ 可逆 则 $\sigma(\mathcal{A})$ 可逆 $\sigma(\mathcal{A}^{-1}) = \sigma^{-1}(\mathcal{A})$　　$\mathcal{A}^{-1} \to A^{-1}$

▶ [Theorem] 设 $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 下矩阵 A　$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$

则 $\mathcal{A}\xi = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$　坐标变换

[Theorem] 设 $\mathcal{A}$ 在两组基下 $\begin{cases} \varepsilon_1 \sim \varepsilon_n & ① \to A \\ \eta_1 \sim \eta_n & ② \to B \end{cases}$ 而①到②的过渡矩阵为 X　$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)X = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$

则 $B = X^{-1}AX$

prof: $\mathcal{A}(①) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A$

$\mathcal{A}(②) = (\eta_1 \cdots \eta_n)B$　$(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)X$

$\Rightarrow \mathcal{A}(②) = \underline{(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)XB}$　$\eta_i = x_{1i}\varepsilon_1 + \cdots + x_{ni}\varepsilon_n$　$\mathcal{A}\eta_i = x_{1i}\mathcal{A}\varepsilon_1 + \cdots + x_{ni}\mathcal{A}\varepsilon_n$

$\Rightarrow \mathcal{A}(②) = (\mathcal{A}\eta_1, \cdots \mathcal{A}\eta_n) = (\mathcal{A}\varepsilon_1 \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n)X = \underline{(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)AX}$

以 $\eta_1 \sim \eta_n$ 为基底 的 ξ 进行变换后：$\mathcal{A}\eta_i = \alpha_i$　$\Rightarrow XB = AX$　$\Rightarrow B = X^{-1}AX$

▶ [Def] $A, B \in M_{n\times n}(P)$ if $\exists X \in M_{n\times n}(P)$　$|X| \neq 0$　s.t. $B = X^{-1}AX$

则称 A 相似于 B　$A \backsim B$　(i) 自反性　(ii) 对称性　(iii) 传递性　$\Rightarrow$ 等价关系

易知 $\mathcal{A}$ 在不同基下 A　B : $A \backsim B$

▶ [prop] (i) $B_i = X^{-1}A_iX$　$\Rightarrow$　$B_1 + B_2 = X^{-1}(A_1 + A_2)X$

$B_1 \cdot B_2 = X^{-1}(A_1 \cdot A_2)X$

(ii) $B = X^{-1}AX$ 且 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$　$\Rightarrow$　$f(B) = X^{-1}f(A)X$

Summary 总结

Chapter

Title 特征值与特征向量 **Date** Dec. 14th

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

Keywords

- 特征值与特征向量
- Part Ⅱ & Ⅲ
- 对角阵

§. 线性变换特征值与向量

pt.1

▶ [Def] $\mathcal{A} \in L(V)$ if 对 $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ $\exists\, 0 \neq \xi \in V$ s.t. $\mathcal{A}\xi = \lambda_0 \xi$ 则 λ_0 为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值.

ξ 为 λ_0 的一个特征向量.

求特征值&特征向量

必要: $\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为基下对应 A

$(\mathcal{A}\varepsilon_1 \cdots \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A$

设 $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$ $\xi \neq 0$ $\xi = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$T\xi = x_1 T\varepsilon_1 + \cdots + x_n T\varepsilon_n = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$= \lambda\xi = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) \cdot \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

则 $AX = \lambda X \Rightarrow (\lambda E - A)X = \vec{0}$ $X \neq \vec{0}$ $\Rightarrow (\lambda E - A)X = 0$ 有非0解 [$Ax=0$ 齐次方程组]

$\Rightarrow |\lambda E - A| = 0$ $(r(\lambda E - A) < n)$ 即 $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 此方程应为一个 n 次多项式

(行列式取对角线的一项 $\exists \lambda^n$)

[Def] 设 $A \in M_{n\times n}$ 称 $|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 A 的特征多项式

充分 λ_0 为 $|\lambda I_n - A| = 0$ 一个根 则 $(\lambda I_n - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ 有非0解

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为一个非0解 则 $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A})$

且 $\xi = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为 $\mathcal{A}$ 属于 λ_0 的一个特征向量

[Method] (i) 求 V的一组基 $\mathcal{A} \to A$

(ii) 计算 $p(\lambda) = |A - \lambda E|$

(iii) 求 $p(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_1 \sim \lambda_0$

(iv) 对每个 λ_i 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的一个基础解系

(v) 以求出的基础解系为坐标写出 V 的一个向量组，即为 V_{λ_i} 的一组基

ex T在 $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ 下矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (i)

求T特征值及向量

(ii) $|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$

(iii) $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 5$

(iv) $\lambda_1 = -1$ 时 $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} X = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$ 时 $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

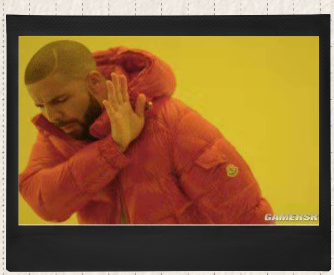
$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(v) V_{λ_1} 一组基为 ξ_1, ξ_2 $\xi_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $\xi_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$

$\forall k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 都为 $\mathcal{A}$ $\in -1$ 的特征向量

V_{λ_2} 一组基为 ξ_3 $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

$\forall k\xi_3$ ……



▶ [Def] V.IP $\mathcal{A} \in L(V)$ 则 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ 的所有特征向量和 $\vec{0}$ 一起构成 V 的一个子空间

$V_\lambda = \{\xi \in V : \mathcal{A}\xi = \lambda\xi\}$

V_λ 为 $\mathcal{A}$ 对应 λ 的特征子空间

§. pt.2

研究 $|\lambda I_n - A|$

[Remark] $|\lambda I_n - A|$ 对角线次数为 n 其它项 λ 次数至多为 $n-2$

[Remark] $|\lambda I_n - A|$ n 次与 $n-1$ 次项: $\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}$

常数项: $|-A| = (-1)^n |A|$

[Remark] 复数域中 $|\lambda I_n - A|$ 有且仅有 n 个根 (不考虑重合)

if $|\lambda I_n - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$

Keywords 关键词	Notes 笔记

$|\lambda I_n - A| = \lambda^n - (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$\Rightarrow$ 对比 λ^{n-1} 与常数项

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ 记 $tr(A) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为 A 的迹

$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

▶ [Def] $|\lambda I_n - A|$ 的根 λ_0 也称为 A 的特征值

$(\lambda I_n - A)X = 0$ 的非0解为 A 属于 λ_0 的特征值

§. Pt 3 & 对角阵

▶ [Theorem] 相似矩阵 $(A \backsim B)$ 有相同特征多项式 $(|\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - A|)$

prof: $|\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - X^{-1}AX| = |\lambda X^{-1}X - X^{-1}AX| = |X^{-1}||\lambda I - A||X| = 0$

▶ [Theorem] A 矩阵可以在某组基下为对角阵 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

prof: "$\Rightarrow$" $A(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 即 $A\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i$

$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 线性无关 $\Rightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

▶ [Theorem] 属于不同特征值的特征向量 线性无关

prof: 归纳法: 1° $m=1$ ξ ✓

2° 假设 $m=k$ 时 ✓

$m=k+1$ 时 $\xi_1 \cdots \xi_{k+1}$ 是 $\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}$ 的特征向量

$b_1\xi_1 + \cdots + b_{k+1}\xi_{k+1} = 0$ ①

$b_1 A\xi_1 + \cdots + b_{k+1}A\xi_{k+1} = 0 \Rightarrow b_1\lambda_1\xi_1 + b_2\lambda_2\xi_2 + \cdots + b_{k+1}\lambda_{k+1}\xi_{k+1} = 0$ ②

② $- \lambda_{k+1}$ ①:

$b_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\xi_1 + \cdots + b_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\xi_k = 0$

$\lambda_1 \sim \lambda_{k+1}$ 互不相等 $\xi_1 \sim \xi_k$ 线性无关 $\Rightarrow b_1 = \cdots = b_k = 0$

$\Rightarrow b_{k+1}\xi_{k+1} = 0 \Rightarrow b_{k+1} = 0$

则 $m=k+1$ 时 ✓

由1° 2°及归纳法 得证

[prop] if A 有 n 个 λ then A 在某基下为对角阵

if $\mathbb{P}$ 为复数 then 只需 λ 无重根

▶ [Def] if $A \in M_{n\times n}(\mathbb{P})$ $\backsim$ 对角阵,则称 A 可对角化 $\Lambda = P^{-1}AP$ 其中 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $P = (x_1 \cdots x_n)$

[Theorem] A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

Summary 总结

Chapter

Title 欧式空间

Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

- 欧式空间 pt.1
- 二次型
- 欧式空间 pt.2

§. 欧式空间

▶ [Def] 设 V 为 $\mathbb{R}$ 上线性空间 在 V 中定义一个二元实函数，称为内积，记作 (α,β)

满足 (i) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(ii) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(iii) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(iv) $(\alpha,\alpha)\geq 0$; $\alpha=0 \Leftrightarrow (\alpha,\alpha)=0$

则赋予内积的线性空间为欧式空间　　$(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$　　$\alpha,\beta\to(\alpha,\beta)$

ex. $\mathbb{R}^n$ $\forall\alpha=(a_1\cdots a_n)$ $\beta=(b_1\cdots b_n)$

定义 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 为一个内积

依次证明 (i) (ii) (iii) (iv) 即可

[prop] 对称性 $(\alpha,k\beta)=(k\beta,\alpha)=k(\beta,\alpha)=k(\alpha,\beta)$

$(\alpha,\beta+\gamma)=(\beta+\gamma,\alpha)=(\beta,\alpha)+(\gamma,\alpha)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$

▶ [夹角与模] 定义 α 的模：$|\alpha| \triangleq \sqrt{(\alpha,\alpha)}$

关于 $|\alpha|$　$\forall k\in\mathbb{R}$　$|k\alpha|=|k||\alpha|$

$\alpha\neq 0$　$\frac{\alpha}{|\alpha|}$ ⇒ 单位化

定义 α,β 的夹角：$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$　　$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\in[0,\pi]$

Prof 柯西不等式 $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$　$\forall\alpha,\beta\in V$　当且仅当 α,β 线性相关时取"="

1° 1° $\beta=0$ 时 ✓

2° $\beta\neq 0$ 时 作 $\gamma=\alpha+t\beta$

$(\gamma,\gamma)=(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)=(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta)\geq 0$

取 $t=-\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$　$=(\alpha,\alpha)-2\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}+\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}$

$=(\alpha,\alpha)-\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)}\geq 0$

$\Rightarrow (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\geq(\alpha,\beta)^2 \Rightarrow |\alpha||\beta|\geq|(\alpha,\beta)|$

2° 1° α 与 β 线性相关

$\beta=k\alpha$　$|(\alpha,\beta)|=|k||(\alpha,\alpha)|$

$\|$

$|\alpha||\beta|=|k||\alpha|^2=|k||(\alpha,\alpha)|$

2° "=" ✓ 时 $\beta=0$ ✓

Ex 证明 $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

prof: $|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$

$\leq|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2$

定义正交 $(\alpha,\beta)=0$　记为 $\alpha\perp\beta$　$\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\pi}{2}$

Ex 证明 $\alpha\perp\beta$ 时 $|\alpha|^2+|\beta|^2=|\alpha+\beta|^2$

prof: $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+\cancel{2(\alpha,\beta)}+|\beta|^2$

§. 二次型

▶ [Def] 设系数在 P 中的二次多项式 f 称为 P 上 n 元二次型　　$f\leftrightarrow A$

$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$　　例：$2a_{12}x_1x_2=a_{12}x_1x_2+a_{21}x_2x_1$

$\Rightarrow f=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$　(令 $a_{ij}=a_{ji}$)　$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$　$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n$

$\vdots$　　　$\vdots$

$+a_{n1}x_nx_1+\cdots\cdots+a_{nn}x_n^2$

$f(x)=X^T\cdot A\cdot X$　　$(\cdots)A[\vdots]$

A 称为 $f(x)$ 的矩阵　A 为对称阵

▶ [Def] 设 $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$　$X=CY$　称由 $X\to Y$ 的一个线性替换　　if $|C|\neq 0$　则称 $X=CY$ 为非退化线性替换

$(C=(c_{ij})_{n\times n})$　　$Y=C^{-1}X$

[Prop] $f(x_1\cdots x_n)=g(y_1\cdots y_n)$ 也为二次型

$X^TAX=Y^TBY=(CY)^TA(CY)=Y^T\underline{C^TAC}Y$

$(C^TAC)^T=C^TA^TC=C^TAC$　C^TAC 对称

$\Rightarrow C^TAC=B$

Keywords 关键词	Notes 笔记
	▶ [Def] 设 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{P})$ if ∃ 可逆 $C\in M_{n\times n}(\mathbb{P})$ s.t. $B=C^TAC$ 则称 A, B 合同 (i) 自反性 (ii) 对称性 (iii) 传递性
	[prop] 经过非退化线性替换 原二次型与新二次型矩阵合同
	▶ [Def] $f(x_1\cdots x_n)$ 为一个实二次型 if ∀ 不全为0 的 $c_1\sim c_n$ 有 $f(c_1\cdots c_n)>0$ 则称 $f(x_1\cdots x_n)$ 为正定二次型
	if X^TAX 正定 A为正定矩阵 即非全0时为正 $f\geq 0$ 当且仅当 $c_1=\cdots=c_n=0$ 时取"="
	[Prop] $f(x)$ 正定 经非退化线性替换 $X=CY$ $g(y)$ 也正定
	取 $\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}\neq\vec{0}$ $\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\triangleq C\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}\Rightarrow g(k_1\cdots k_n)=f(c_1\cdots c_n)>0$
§. pt.2	▶ [Def] V 欧 $\dim V=n$ $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$
	$\forall\alpha=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ $\beta=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$
	$(\alpha,\beta)=(x_1\varepsilon_1+\cdots,y_1\varepsilon_1+\cdots)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=X^TAY$ 其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $a_{ij}=a_{ji}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$
	A 即为 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_n$ 的度量矩阵
	[prop] 设 $\eta_1\sim\eta_n$ 为另一组基 且 $(\eta_1\cdots\eta_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)C$ B为 $\eta_1\sim\eta_n$ 度量矩阵
	则 $B=C^TAC$
	prof: $\alpha=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)X=(\eta_1\cdots\eta_n)X'$ $X=CX'$
	$\beta=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)Y=(\eta_1\cdots\eta_n)Y'$ $Y=CY'$
	$(\alpha,\beta)=X^TAY=X'^T\underline{B}Y'=X'^T\underline{C^TAC}Y'$
	令 $X_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ $C^TAC=d_{ij}$
	$X_i^TC^TACX_j=d_{ij}=X_i^TBX_j=b_{ij}\Rightarrow B=C^TAC$
	[prop] $\forall\alpha\neq0$ $(\alpha,\alpha)=X^TAX>0\Rightarrow$ 正定 $\Rightarrow$ A 正定 度量阵A正定

Summary 总结

Chapter

Title 正交问题 **Date** /

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

- 标准正交基
- 标准化
- 正交矩阵
- 正交变换

§. 标准正交基

▶ **[Def]** V: 欧 $\dim V = n$

定义 对 V 中一组非0向量，若它们两两正交，则称这个向量组为一正交组

[Prop] 正交组是线性无关组

prof: 设 $\alpha_1 \sim \alpha_m$ 是一正交组

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

$(\alpha_i, k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m) = 0$

$\Rightarrow k_1(\alpha_i, \alpha_1) + \cdots + k_i(\alpha_i, \alpha_i) + k_m(\alpha_i, \alpha_m) = 0$

$\Rightarrow k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0 \quad \alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow k_i = 0 \quad i = 1, 2 \cdots m$

[Def] 由单位向量组成的正交基 称为标准正交基 (ONB)

[prop] 1. $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 为一组 ONB $\Leftrightarrow (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 度量矩阵为 I_n 充要条件

2. $\forall \alpha \in V \quad \alpha = (\alpha, \varepsilon_1)\varepsilon_1 + (\alpha, \varepsilon_2)\varepsilon_2 + \cdots + (\alpha, \varepsilon_n)\varepsilon_n$ 坐标性质

3. $\alpha = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \beta = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 内积性质

$(\alpha, \beta) = X^T A Y = X^T Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

§. 标准化

▶ **[Theorem]** V 中任一正交组都可扩充为一正交基

prof: $\alpha_1 \sim \alpha_m \quad \dim V = n$

1° $n - m = 0$ ✓

2° 假设 $n - m = k$ ✓

$n - m = k+1$ 时 总 $\exists \beta \in V$ 不能由 $\alpha_1 \sim \alpha_m$ 线性表示

$\alpha_{m+1} \triangleq \beta - k_1\alpha_1 - \cdots - k_m\alpha_m \quad k_1 \sim k_m$ 待定

$(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i)$ 只需取 $k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$

$\Rightarrow \alpha_{m+1} \neq 0$ 且 $\alpha_1 \sim \alpha_{m+1}$ 正交

由1° 2°及归纳法

▶ **[Method]** $\alpha_1 \xrightarrow{扩充} \alpha_1 \cdots \alpha_n \xrightarrow{单位化} \eta_1 \cdots \eta_n$ (ONB)

[Theorem] 对 V 中 $\forall$ 一组基 $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 都可找到一个 ONB $\eta_1 \sim \eta_n$ s.t. $L(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i) = L(\eta_1 \cdots \eta_i) \quad i = 1, 2 \cdots n$

(i) 取 $\eta_1 = \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|}$

(ii) 假定 $\exists \eta_1 \sim \eta_m$ s.t. 正交 且 $L(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i) = L(\eta_1 \cdots \eta_i) \quad i = 1 \cdots m$

$m < n \Rightarrow \varepsilon_{m+1}$ 不能由 $\eta_1 \sim \eta_m$ 线性表示

作 $\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_{m+1}, \eta_i)\eta_i \quad \xi_{m+1} \neq 0$

令 $\eta_{m+1} = \frac{\xi_{m+1}}{|\xi_{m+1}|}$ 则 $\eta_1 \sim \eta_{m+1}$ 单位正交 $L(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1 \cdots \eta_{m+1})$

由 (i)(ii) 及归纳法保证

[施密特正交化]

$\xi_1 = \varepsilon_1$

$\Rightarrow \xi_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1$

$\xi_3 = \varepsilon_3 - \frac{(\varepsilon_3, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \frac{(\varepsilon_3, \xi_2)}{(\xi_2, \xi_2)}\xi_2$

……

$\xi_n = \varepsilon_n - \sum_{i=1}^{n}\frac{(\varepsilon_n, \xi_i)}{(\xi_i, \xi_i)}\xi_i$

[Remark] $(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

§. 正交矩阵

[Prop] $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ $\eta_1 \sim \eta_n$ 为两组 ONB $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A = (\eta_1 \cdots \eta_n)$

$\eta_i = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \quad \eta_j = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

$(\eta_i, \eta_j) = a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = (a_{1i} \cdots a_{ni})\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = A^T$ 的 i 行 $\times A$ 的 j 列 $= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow A^T A = E \quad A^T = A^{-1}$

Keywords 关键词	Notes 笔记

▶ [Def] 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{P})$ 且 $A^TA = I_n$ 则称 A 是正交阵

[Prop] 1. 从一个 ONB → 另一个 ONB 的过渡阵为正交阵

2. if $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ ONB $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A = (\eta_1, \cdots \eta_n)$ $AA^T = E$ then $\eta_1 \sim \eta_n$ ONB

prof: $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$

$\eta_i = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\alpha_i$

$\Rightarrow (\eta_i, \eta_j) = \alpha_i^T\alpha_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

3. A 的列/行向量组是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 ONB，其中 A 正交阵

[Prop] 正交阵的逆也为正交阵 Prof: $A\cdot A^T = E$ $A^{-1} = A^T$ $\Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}\cdot(A^T)^T = A^{-1}A = E$

两个正交阵的积也为正交阵 Prof: $A\cdot A^T = E$ $B\cdot B^T = E$ $\Rightarrow AB\cdot(AB)^T = ABB^TA^T = A\cdot A^T = E$

$|A| = \pm 1$ (A 正交阵) Prof: $|A|^2 = |A|\cdot|A^T| = |A\cdot A^T| = 1$

§. 正交变换

▶ [Def] 设 $A \in L(V)$ 且保持向量内积不变 即 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$ $\forall \alpha, \beta \in V$ 则 A 为正交变换 ①

① ⟺ $\forall \alpha \in V$ $(A\alpha, A\alpha) = (\alpha, \alpha)$ ⟺ $\forall \varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ ONB $A\varepsilon_1 \sim A\varepsilon_n$ ONB ⟺ A 在 $\forall$ ONB 下 A 正交矩阵

prof: ① ⟺ ② ① ⟺ ③ ③ ⟺ ④

1° ① ⇒ ② if A 正交变换 $(A\alpha, A\alpha) = (\alpha, \alpha) \Rightarrow |A\alpha| = |\alpha|$

② ⇒ ① $(A\alpha, A\alpha) = (\alpha, \alpha)$

$(A\beta, A\beta) = (\beta, \beta)$

$(A(\alpha+\beta), A(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$

$= (A\alpha + A\beta, A\alpha + A\beta) = (A\alpha, A\alpha) + 2(A\alpha, A\beta) + (A\beta, A\beta)$

$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (A\alpha, A\beta)$

2° ① ⇒ ③ $\forall$ ONB $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$(A\varepsilon_i, A\varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

③ ⇒ ① $\forall \alpha = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\beta = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ ONB $A\varepsilon_1 \sim A\varepsilon_n$ ONB

$(A\alpha, A\beta) = (A(x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n), A(y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n))$

$= (x_1A\varepsilon_1 + \cdots + x_nA\varepsilon_n, y_1A\varepsilon_1 + \cdots + y_nA\varepsilon_n)$

$= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (\alpha, \beta)$

3° ③ ⇒ ④ $A(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A = (\eta_1 \cdots \eta_n)$

$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ ONB $\eta_1 \sim \eta_n$ ONB ⇒ A 正交矩阵

④ ⇒ ③ if $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ ONB $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A = (\eta_1 \cdots \eta_n)$ A 正交 ⇒ $\eta_1 \cdots \eta_n$ ONB

Summary 总结

Chapter

Title 专题

Date /

Keywords 关键词	Notes 笔记	Review 复习记录 / / / / /

·实对称矩阵对角化

§. 实对称矩阵对角化

▶ [Theorem] 实对称阵 A 的特征值都是实数

prof: $\lambda \in \sigma(A)$ $\alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = \lambda\alpha$

令 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{pmatrix}$ 则 $\bar{\alpha}^T A\alpha = \lambda\bar{\alpha}^T\alpha$

$\bar{\alpha}^T A\alpha = \bar{\alpha}A^T\alpha = (\overline{A\alpha})^T\alpha = (\overline{\lambda\alpha})^T\alpha = \bar{\lambda}\bar{\alpha}^T\alpha$

$(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{\alpha}^T\alpha) = 0$ $\alpha \neq 0 \Rightarrow \bar{\alpha}^T\alpha = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in R$ $m = a + bi$ 则 $\bar{m} = a - bi$ $m \in R \Leftrightarrow \bar{m} = m$

▶ [Theorem] 设 A 为 n 阶实对称阵，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ 有 $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta)$

prof: $(A\alpha, \beta) = (A\alpha)^T\beta = \alpha^T A\beta$

$(\alpha, A\beta) = \alpha^T A\beta$

▶ [Theorem] 属于实对称阵 A 的不同特征值的特征向量彼此正交

prof: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \sigma(A)$ $\alpha_1 \neq 0$ $\alpha_2 \neq 0$ $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$

$(A\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, A\alpha_2) = \lambda_2(\alpha_1, \alpha_2)$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = 0$

▶ [Theorem] 设 A 是 n 阶实对称阵 则 $\exists$ 正交阵 C s.t. $C^{-1}AC = C^TAC = \Lambda\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right)$

* prof: 1° $n=1$ 时 $A = (a)$ $\exists C = (1)$ s.t. $C^TAC = (1)$

2° 假设 $n = k-1$ 时 ✓

对 $n = k$ 实对称矩阵 A $\lambda_1 \in \sigma(A)$ $|\alpha_1| = 1$ $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$

由 α_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 ONB $\alpha_1 \sim \alpha_n$

构造 $C_1 = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 则 C_1 为正交矩阵

引证: $C_1^TC_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

则 $AC_1 = (A\alpha_1 \cdots A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1 \cdots A\alpha_n)$

$C_1^TAC_1 = (\lambda_1C_1^T\alpha_1 \quad \cdots\cdots)$ 研究第一列 $\lambda_1C_1^T\alpha_1 = \lambda_1\begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$C_1^TAC_1$ 对称易证 $C_1^TAC_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & B \end{bmatrix}$

由归纳 $\exists C_2$ 正交阵 s.t.

$C_2^TBC_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

则令 $C = \underset{\text{正交}}{C_1}\underset{\text{正交}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}} \Rightarrow C$ 正交阵

$C^TAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2^T \end{bmatrix} C_1^TAC_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

令 $C = (\beta_1 \cdots \beta_n)$ $AC = C\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\beta_1 \cdots \beta_n) \Rightarrow A\beta_i = \lambda_i\beta_i$

▶ [Method] (i) 求出 A 全体不同特征值 $\lambda_1 \sim \lambda_r$

(ii) 对每个 λ_i 求解 $(\lambda_iI_n - A)X = 0$ 得出一基础解系

是 V_{λ_i} 的一组基正交化，得 V_{λ_i} 的一个 ONB $\eta_{i1} \cdots \eta_{ik_i}$

(iii) $C = (\eta_1 \cdots \eta_{1k_1} \cdots \eta_{r1} \cdots \eta_{rk_r})$

[Prop] $r(A) = A$ 的非0特征值个数

[Prop] 正定阵特征值都大于0；正定阵与E合同

Ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 求正交阵 C s.t. $C^TAC = \Lambda$

$|\lambda I_4 - A| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3) \Rightarrow \lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -3$

1° $\lambda_1 = 1$ 时 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4$

$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2° $\lambda_2 = -3$ 时 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$ $\xi_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\xi_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

正交化为 η_1 η_2 η_3 η_4 即可

Chapter

Title 线性代数总复习

Date /

Keywords 关键词 | Notes 笔记 | Review 复习记录 / / / / /

§. 行列式

Ex $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b_2-b_1 & b_3-b_2 & a_1-b_3 \\ b_2-b_1 & b_3-b_2 & a_2-b_3 \\ b_2+b_1 & b_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}$

$= (b_2-b_1)(b_3-b_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots \end{vmatrix}$

$= 0$

Ex $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & & \\ 4 & 9 & 5 & 0 & & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & & \\ & & & \ddots & 9 & 5 \\ & 0 & & & 4 & 9 \end{vmatrix}_n$

$D_n = 9D_{n-1} - 5\cdot 4 D_{n-2}$

$= 9D_{n-1} - 20D_{n-2}$

$\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$

$a=4, b=5$ / $a=5, b=4$ $D_n - 4D_{n-1} = 5^{n-2}(D_2 - 4D_1)$

$D_1 = 9$ $D_2 = 61$ $\left.\begin{array}{l} D_n - 4D_{n-1} = 5^n \\ \text{同理} \quad D_n - 5D_{n-1} = 4^n \end{array}\right\}$ $D_{n-1} = 5^n - 4^n$

$D_n = 5^{n-1} - 4^{n-1}$

§. 矩阵之后

▶ [Review] 1. $Ax = b$ $B = [A|b]$

(i) $r(A) < r(B)$ 无

(ii) $r(A) = r(B)$ 有

$r = n$ 唯一 $r < n$ 无穷

2. $A^*A = AA^* = |A|I_n$

3. $r(A),\ r(B),\ r(A+B) \le r(A,B)\ r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \le r(A) + r(B) \le r(AB) + n \le r(A)+n、r(B)+n$

4. $(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A$ $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_n$ 一组基 A 可逆 则 $\eta_1 \sim \eta_n$ 为一组基

$\forall \alpha = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) X = (\eta_1 \cdots \eta_n) Y$ $Y = A^{-1}X$

5. $\mathcal{A}$ 在 $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 下矩阵为 A

$(\eta_1 \cdots \eta_n)$ … 为 B $(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) X$ $B = X^{-1}AX$ 线变

6. $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 度量阵 A

$(\eta_1 \cdots \eta_n)$ … B $(\eta_1 \cdots \eta_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) X$ $B = X^TAX$ 欧式

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 求 A^{100}

$|\lambda I - A| = 0$ $\lambda = 1\ \ 5\ \ -5$

$\lambda = 1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 5 \to \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\lambda = -5 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

则 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}P$ $A^{100} = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}^{100}P$

7. $\lambda \in \sigma(A)$ $f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i$ 则 $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$

Ex $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ $\lambda = 1\ 2\ 3$ 求 $|A^2 + A|$

令 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$ $\varphi(A) = |A^2 + A|$

由 $1, 2, 3 \in \sigma(A) \Rightarrow \varphi(1) = 2\ \ \varphi(2) = 6\ \ \varphi(3) = 12 \in \sigma(\varphi(A))$

$\varphi(A) = \varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(3) = 144$

8. $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ $tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ (对角线元素)

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \backsim B = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{bmatrix}$ $x=?\ y=?$

$\lambda \in \sigma(B)$ $\lambda = 5\ \ -4\ \ y$

$|-4I_n - A| = |A + 4I_n| = 0 = 9(x-4) \Rightarrow x = 4$

$tr(A) = 2 + x = 6 = 5 - 4 + y$ $y = 5$

Ex $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ λ_A 只能为 1 or 2

$\lambda \in \sigma(A)$ $A\alpha = \lambda\alpha$

$(A^2 - 3A + 2I_n)\alpha = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-1)\alpha = 0 \quad (\alpha \ne 0)$

Summary 总结