线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间__2015.11.14

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij}=i\times j$，计算 $|A|$.

2. 求 p 使得矩阵 $A=\begin{pmatrix} p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 15 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小，并求 $r(A)$.

3. 设已知矩阵$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$A^2-B^2$.

4. 已知3阶矩阵 A 有特征值6,8,9，求矩阵 $B=A^2-16A+64E$ 的特征值.

5. 若5元方程组 $Ax=b, b\neq\theta$ 有解 $\xi_1=(1,1,1,1,1)^T, \xi_2=(1,2,3,4,5)^T, \xi_3=(1,0,-3,-2,-3)^T$，且 $r(A)=3$，求方程组的通解.

二.(12分) (1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$;(2)由(1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

三.(10分) 设3阶方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，且 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ a & 4 & d \\ b & 2 & 6 \end{pmatrix}$，求$a,b,c,d$的值?

四.(12分) 求过点：$(-2,0),(-1,1),(1,-3),(t,1)$ 的三次多项式函数 $y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 t 为参数.

五.(12分) 一个方阵 A 称为幂零的，如果存在正整数 N 使得 $A^N=O$. 设 A 为幂零的，证明
(1) $B=a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 也是幂零的;
(2) 若 $a_0\neq 0$，则 $C=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 是可逆矩阵，并利用 B 来表示 C^{-1}.

六.(14分) 若n 阶方阵A 满足$A^2=A$, 则称A 为幂等矩阵. 设A 为幂等矩阵，证明

(1) $E-A$ 也为幂等矩阵;

(2) $r(A)+r(E-A)=n$;

(3) A 有$r(A)$个属于特征值1 的线性无关的特征向量，$r(E-A)$个属于特征值0 的线性无关的特征向量.

线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2016.11.12

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&6&-3\\-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求 A^n .

2. 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^{3\times3}$, $|A|=2$，矩阵 $B=(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$，计算 $|B|$.

3. 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}$ 满足 $A\alpha=\beta$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&3&5\\2&-1&-3\end{pmatrix}$，求解向量 α.

4. 设 $A\in R^{m\times n}(m>n),\mathrm{r}(A)=n$，证明：存在矩阵 $P\in R^{n\times m}$ 使得 $PA=E_n$.

5. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1&2\\0&0&\cdots&1&2&1\\0&0&\cdots&2&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\\1&2&\cdots&0&0&0\\2&1&\cdots&0&0&0\end{vmatrix}$.

二.(10分) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}7\\5\\-2\\-7\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-1\\10\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其它向量.
(2) 若有向量 $\beta=(1,0,-1,-1)^T$，则向量组 α_3,α_4,β 是否与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 等价？

三. (10分) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in R^{m\times n},A_2\in R^{k\times n}$.
如果这两个方程组有相同的解集，请问 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组是否一定等价？若等价请给出证明，否则举出反例.

四.(10分) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

五.(15分) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\2&5&-11\\2&3&-5\end{pmatrix}$.

(1) 解方程组 $Ax=\theta$;
(2) 求 $A^2x=\theta$ 但 $Ax\neq\theta$ 的解集.

六.(15分) (1) 设 $x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n$ 为实数，其中 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同. 求证：存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $f(x)$ 使得$y_i=f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n$;
(2) 设带参数 t 的矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}2t-1&f(t)\\-f(t)&2t-1\end{pmatrix}$，其中 $f(t)$ 为 t 的多项式，满足：$f(0)=f(1)=0,|A(t)|>0$. 求满足条件的一个多项式 $f(t)$.

线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2017.4.22

一. 解答下列各题(8分×5=40分)

1. 设 A 为3阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵. 已知 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

2. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2=-A$. 证明：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

3. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶的可逆方阵，C 是 $m\times n$ 的矩阵，O 是零矩阵. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ，$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3}-A$.

5. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $r<n$，证明存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B 使得 $AB=O$，这里 O 表示零矩阵.

二.(12分) 若方阵 X 满足 $X^2=X$，则称 X 是幂等的. 设 A 和 B 是同阶的幂等方阵，证明 $(A+B)$ 是幂等的当且仅当 $AB=BA=O$，这里 O 表示零矩阵.

三. (12分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 & =a_1 \\ x_2-x_3 & =a_2 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ x_{n-1}-x_n & =a_{n-1} \\ x_n-x_1 & =a_n \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 在有解的情况下，求方程组的解集.

四.(12分) 解带参数方程组 $\begin{cases} x_1+(\lambda^2+1)x_2+2x_3 & =\lambda, \\ \lambda x_1+\lambda x_2+(2\lambda+1)x_3 & =0, \\ x_1+(2\lambda+1)x_2+2x_3 & =2. \end{cases}$

五.(12分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}$.

六.(12分) 设 A 和 X 为 n 阶方阵，且满足 $AX=A+2X$.

1. 证明：$AX=XA$;
2. 若 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$X$ 是三阶未知方阵，求解矩阵方程 $AX=A+2X$.