线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________ 专业__________ 考试时间 2015.11.14

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij}=i\times j$，计算 $|A|$.

解：若$n=1$，则$A=(1)$，于是 $|A|=1$.

若 $n\geq 2$，则 A 的任意两列都成比例，所以 $|A|=0$.

2. 求 p 使得矩阵 $A=\begin{pmatrix} p & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 15 & 3\\ 2 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小，并求 $r(A)$.

解：$A\to\begin{pmatrix} 1 & 7 & 15 & 3\\ 0 & -12 & -30 & -3\\ p & 4 & 10 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & p & 5p & -p\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 1\\ 0 & 4 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 2p & -p\end{pmatrix}$,

$p=0$ 时，$\mathrm{r}(A)$ 最小为2.

3. 设已知矩阵$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 求$A^2-B^2$.

解：$A=\dfrac{1}{2}((A+B)+(A-B))=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 15\\ 5 & 12\end{pmatrix}$,

$B=\dfrac{1}{2}((A+B)-(A-B))=\begin{pmatrix} -1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,

$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 8 & 15\\ 5 & 13\end{pmatrix}$.

4. 已知3阶矩阵 A 有特征值6,8,9，求矩阵 $B=A^2-16A+64E$ 的特征值.

解：易知 $B=f(A)$，其中 $f(x)=x^2-16x+64=(x-8)^2$。故 B 有特征值 $f(\lambda)=(\lambda-8)^2$.

于是，B 的特征值是：$f(6),f(8),f(9)$，即 $4,0,1$.

5. 若5元方程组 $Ax=b, b\neq\theta$ 有解 $\xi_1=(1,1,1,1,1)^T,\xi_2=(1,2,3,4,5)^T,\xi_3=(1,0,-3,-2,-3)^T$，且 $r(A)=3$，求方程组的通解.

解：A 的秩 $\mathrm{r}(A)=3$，则对应的齐次线性方程组的基础解系含2 个向量.

令 $\alpha_1=\xi_2-\xi_1=(0,1,2,3,4)^T,\alpha_2=\xi_3-\xi_1=(0,-1,-4,-3,-4)^T$.

易知 α_1,α_2 为对应齐次方程组的非零解，且线性无关，故构成基础解系.

于是原方程组的通解为： $x=\xi_1+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

二.(12分) (1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}$；(2)由(1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ & & \vdots & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$.

解：(1) 此行列式为 $n+1$ 阶的 Vandermonde 行列式，故

$$D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2\\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2}\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1}\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{i<j}(x_j-x_i).$$

(2) 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$，则 D 为行列式 $D(x)$ 中 x^{n-1} 的余子式，

故 $D(x)$ 中 x^{n-1} 的代数余子式为：$(-1)^{2n+1}D=-D$，为 $D(x)$ 多项式中 x^{n-1} 项的系数 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-x_i)\prod\limits_{i<j}(x_j-x_i)$，于是 $D=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)\prod\limits_{i<j}(x_j-x_i)$.

三.(10分) 设3阶方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，且 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ a & 4 & d \\ b & 2 & 6 \end{pmatrix}$，求$a,b,c,d$的值？

解：$\mathrm{r}(A)=2$ 说明$|A|=0$，故 $AA^*=|A|E=O$。故 $\mathrm{r}(A^*)\le 3-\mathrm{r}(A)=1$.

由条件易知 $\mathrm{r}(A^*)\ge 1$，故 $\mathrm{r}(A^*)=1$，即 A^* 的列成比例.

从而立即可得 $a=8,\ b=4,\ c=3,\ d=12$.

四.(12分) 求过点：$(-2,0),(-1,1),(1,-3),(t,1)$ 的三次多项式函数 $y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 t 为参数.

解：将点的坐标代入函数，得方程组

$$\begin{cases} -8a_3+4a_2-2a_1+a_0=0 \\ -a_3+a_2-a_1+a_0=1 \\ a_3+a_2+a_1+a_0=-3 \\ t^3a_3+t^2a_2+ta_1+a_0=1 \end{cases}$$

对其增广矩阵做初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ t^3 & t^2 & t & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (t^2-1)(t+2) & -2(t+1)^2 \end{pmatrix}.$$

当 $t=1$ 或 $t=-2$ 时，$\mathrm{r}(A)=3<\mathrm{r}(A,b)=4$，故方程组无解，即函数不存在.

当 $t=-1$ 时，$\mathrm{r}(A,b)\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

故通解为：$(0,-1,-2,0)^T+k(-1,-2,1,2)^T$，$k$ 为任意非零数，即函数为

$y=-kx^3-(1+2k)x^2+(-2+k)x+2k$.

当 $t\ne 1,-2,-1$ 时，$\mathrm{r}(A,b)\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{t+1}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-t^2+t+4}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2t^2-3t+3}{(t-1)(t+2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2(t+1)}{(t-1)(t+2)} \end{pmatrix}$.

故函数为 $y=\frac{1}{(t-1)(t+2)}((t+1)x^3+(-t^2+t+4)x^2+(-2t^2-3t+3)x-2(t+1))$.

五.(12分) 一个方阵 A 称为幂零的，如果存在正整数 N 使得 $A^N=O$. 设 A 为幂零的，证明

(1) $B=a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 也是幂零的;

(2) 若 $a_0\ne 0$，则 $C=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 是可逆矩阵，并利用 B 来表示 C^{-1}.

证：假设 $A^k=O$.

(1) $B=AB'=B'A$，其中 $B'=a_1E+a_2A+\cdots+a_mA^{m-1}$，

于是 $B^k=(AB')^k=A^k(B')^k=O$，B 是幂零的。

(2) 易知有如下的矩阵关系：

$(a_0E+B)(\frac{1}{a_0}E-\frac{1}{a_0^2}B+\frac{1}{a_0^3}B^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^{k-1})=E+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^k=E$，

即 $C=a_0E+B$ 为可逆矩阵，且 $C^{-1}=\frac{1}{a_0}E-\frac{1}{a_0^2}B+\frac{1}{a_0^3}B^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{a_0^k}B^{k-1}$.

六.(14分) 若n 阶方阵A 满足$A^2=A$. 则称A 为幂等矩阵. 设A 为幂等矩阵，证明

(1) $E-A$ 也为幂等矩阵;

(2) $r(A)+r(E-A)=n$;

(3) A 有$r(A)$个属于特征值1 的线性无关的特征向量，$r(E-A)$个属于特征值0 的线性无关的特征向量.

证：(1) 按幂等矩阵定义可得 $(E-A)^2=E-2A+A^2=E-A$.

(2) 由幂等矩阵定义可得 $A-A^2=A(E-A)=O$，故有 $\mathrm{r}(E-A)\le n-\mathrm{r}(A)$，

即 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)\le n$.

矩阵的秩又有关系：$n=\mathrm{r}(E)=\mathrm{r}(A+(E-A))\le \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)$，

故有：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)=n$.

(3) 由 $A^2=A\times A=A$，可得 A 至少有 $\mathrm{r}(A)$ 个属于特征值1 的无关特征向量.

又由 $A(E-A)=O$，可得 A 至少有 $\mathrm{r}(E-A)$ 个属于特征值0 的无关特征向量.

由(2)的结论可知，$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)=n$，而无关特征向量个数至多 n 个，

故 A 有 $\mathrm{r}(A)$ 个属于特征值1 的无关特征向量，有 $\mathrm{r}(E-A)$ 个属于特征值0 的无关特征向量.

此处，$\mathrm{r}(A)$ 或 $\mathrm{r}(E-A)$ 为零时，看作没有相应特征值.

线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________ 专业__________ 考试时间 2016.11.12

一. 简答题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&6&-3\\-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$，求 A^n .

解：$A^2=-A, \therefore A^n=(-1)^{n-1}A$.

解法二：$A=(3,-1,2)^T(1,2,-1), A^n=(3,-1,2)^T((1,2,-1)(3,-1,2)^T)^{n-1}(1,2,-1)=(-1)^{n-1}A$.

解法三：$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda+1)$，得 $\lambda=0$ 及特征向量 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$， $\lambda=-1$ 及特征向量 $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&4&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,0,-1)$.

故 $A^n=P\mathrm{diag}(0,0,(-1)^n)P^{-1}=(-1)^{n-1}A$.

2. 已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^{3\times 3}$, $|A|=2$，矩阵 $B=(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$，计算 $|B|$.

解：$|B|=\left|A\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&-3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}\right|=|A|\cdot\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&-3&2\\2&1&-1\end{vmatrix}=20.$

解法二：$|B|=|4\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3|=|10\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3|=10|A|=20.$

3. 已知向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\\x_1\end{pmatrix}$ 满足 $A\alpha=\beta$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&3&5\\2&-1&-3\end{pmatrix}$，求解向量 α.

解：$A\alpha=\beta$ 即 $(A-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix})\alpha=B\alpha=\theta$.

$B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-3&2&5\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha=k\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix},k\in R$.

解法二：$A\alpha=\beta$ 即 $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=x_3,\\-3x_1+3x_2+5x_3=x_2,\\2x_1-x_2-3x_3=x_1.\end{cases}$ 移项得 $\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3=0,\\-3x_1+2x_2+5x_3=0,\\x_1-x_2-3x_3=0.\end{cases}$

求解 $\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-3&2&5\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，解得 $\alpha=k\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix},k\in R$.

4. 设 $A\in R^{m\times n}(m>n), \mathrm{r}(A)=n$，证明：存在矩阵 $P\in R^{n\times m}$ 使得 $PA=E_n$.

证：$\mathrm{r}(A)=n$，故 A 可通过初等行变换得到行简化梯形 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，此等价于左乘可逆矩阵 $Q=\begin{pmatrix}P\\P_2\end{pmatrix}$，

即 $QA=\begin{pmatrix}PA\\P_2A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，故 $PA=E_n$.

证法二：只要证明存在矩阵 P 使得 $A^TP^T=E_n$. 因为 $r(A^T)=r(A)=n=r(A^T,e_i)$，

故存在解 ξ_i 使得 $A^T\xi_i=e_i, i=1,2,\cdots,n$，令 $P^T=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，则有 $P\in R^{n\times m}$，使得 $PA=E_n$.

5. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解：令 $C_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$，则 $C_n = 2C_{n-1} - C_{n-2}$，即 $C_n - C_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-2}$，

可得 $C_n = n+1$. 将 D_n 的第n列与第n-1列，$\cdots$，第1列两两交换，再将第n-1列两两交换到前面，依次下去，经$n(n-1)/2$次交换得到 C_n，故 $D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n+1)$.

解法二：按第一行展开得 $D_n = 2(-1)^{n-1}D_{n-1} + D_{n-2}$，因为 $D_1 = 2, D_2 = -3, D_3 = -4, D_4 = 5$，归纳法证明 $D_n = (-1)^{[n/2]}(n+1)$.

$$D_n = 2(-1)^{n-1}(-1)^{[(n-1)/2]}n + (-1)^{[(n-2)/2]}(n-1) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}(n+1), & n\text{奇数} \\ (-1)^{n/2}(n+1), & n\text{偶数} \end{cases}，证毕.$$

解法三：$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}D_{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2} + (-1)^{n-1}D_{n-1}$

$= 2(-1)^{n(n-1)/2} - D_{n-2} = 4(-1)^{n(n-1)/2} + D_{n-4}$.

分情况可得 $D_n = \begin{cases} n+1, & n = 4k+1, \\ -(n+1), & n = 4k+2, \\ -(n+1), & n = 4k+3, \\ n+1, & n = 4k+4. \end{cases}$.

解法四：$D_n = (-1)^{n(n-1)/2} + (-1)^{n-1}D_{n-1}$，

则 $(-1)^{n(n-1)/2}D_n = 1 + (-1)^{(n-1)(n-2)/2}D_{n-1} = \cdots = n+1$，故 $D_n = (-1)^{n(n-1)/2}(n+1)$.

二.(10分) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其它向量.

(2) 若有向量 $\beta = (1, 0, -1, -1)^T$，则向量组 $\alpha_3, \alpha_4, \beta$ 是否与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 等价？

解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是一个极大无关组，且有 $\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(2) β 能由原向量组表示，故原向量组与向量组 $B: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta$等价,且 $\mathrm{r}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta\} = 3$.

又 $\mathrm{r}\{\alpha_3, \alpha_4, \beta\} = 3$，故 $\alpha_3, \alpha_4, \beta$ 是向量组 B 的一个极大无关组，与 B 等价，故与原向量组等价.

解法二：(1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 是一个极大无关组，且有 $\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(2) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5|\beta) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$，故 $\alpha_3, \alpha_4, \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 表示.

$$(\alpha_3,\alpha_4,\beta|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/4&-1/8&3/8\\0&1&0&1/4&3/8&-1/8\\0&0&1&0&0&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 可由 α_3,α_4,β 表示，
于是 α_3,α_4,β 与原向量组等价.

三. (10分) 设 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 是两个非齐次线性方程组，其中 $A_1\in R^{m\times n}, A_2\in R^{k\times n}$.
如果这两个方程组有相同的解集，请问 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组是否一定等价？若等价请给出证明，否则举出反例.

解：方程组有解则等价.

$A_1x=b_1, A_2x=b_2$ 同解可得 $A_1x=\theta, A_2x=\theta$ 同解，

从而 $A_1x=\theta, A_2x=\theta, \begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}x=\theta$ 同解，故 $r(A_1)=r(A_2)=r\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，

于是 $r(A_1^T)=r(A_1^T,A_2^T)$，即 A_2^T的列可由A_1^T的列表示，反之亦然.

故A_2^T的列与A_1^T的列等价，从而A_1,A_2的行等价.

方程组无解，则不一定等价，见反例：$(A_1,b_1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&0\end{pmatrix}$ 和 $(A_2,b_2)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\end{pmatrix}$.

解法二：方程组有解则等价.

$A_1x=b_1, A_2x=b_2$ 同解可得 $A_1x=\theta, A_2x=\theta$ 同解，

$A_1x=\theta$ 的基础解系构成矩阵 C，则 $A_1C=O, A_2C=O$，且 $r(A_1)=n-r(C)=r(A_2)$.

故 A_1^T 的列与方程组 $C^Ty=\theta$ 的基础解系等价，同样 A_2^T 的列与该基础解系等价，

故 A_1^T 与 A_2^T 列向量组相互等价，即 A_1 的行向量组与 A_2 的行向量组等价.

方程组无解，则不一定等价，反例见前一解法.

四.(10分) 设 $n(n\geq 2)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-a-(n-1)b)(\lambda-a+b)^{n-1}=0$，故 $\lambda=a+(n-1)b, a-b$.

当 $b=0$ 时，$\lambda=a$(n重)，特征矩阵$aE-A=O$，故任意非零向量为属于特征值 a 的特征向量.

当 $b\neq 0$ 时，

$$\lambda=a+(n-1)b \text{ 单重}，\lambda E-A\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&-1\\0&1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}，\text{基础解系为 } \xi_1=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

特征向量为 $k_1\xi_1, k_1\in R, k_1\neq 0$.

$$\lambda=a-b(n-1\text{重}).\ \lambda E-A\to\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}.\text{基础解系为 } \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_n=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

特征向量为$k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n, k_2,\cdots,k_n\in R$，$k_1,\cdots,k_n$ 不全为0.

五.(15分) 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&1\\2&5&-11\\2&3&-5\end{pmatrix}$.

(1) 解方程组 $Ax=\theta$;

(2) 求 $A^2x=\theta$ 但 $Ax\neq\theta$ 的解集.

解：(1) $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\2&5&-11\\2&3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$. 可得齐次方程组的解为 $\alpha=k(-2,3,1)^T$.

(2) $A^2=\begin{pmatrix}37 & 32 & -22\\ -2 & -4 & 8\\ 6 & 4 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得到解为 $\beta=k_2(-2,3,1)^T$，

显然 $A\beta=\theta$，故方程组无解.

解法二：(1) 解法同上.

(2) $A^2x=Ay=\theta$, $y=Ax$，由(1)得 $y=k(-2,3,1)^T$，故 $Ax=k(-2,3,1)^T$，只要解 $Ax=(-2,3,1)^T$.

求解 $\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 2 & 4 & -2\\ 2 & 5 & -11 & 3\\ 2 & 3 & -5 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$，方程组无解，故所求解集为空集.

六.(15分) (1) 设 $x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n$ 为实数，其中 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同. 求证：存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $f(x)$ 使得$y_i=f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n$;

(2) 设带参数 t 的矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix}2t-1 & f(t)\\ -f(t) & 2t-1\end{pmatrix}$，其中 $f(t)$ 为 t 的多项式，满足：$f(0)=f(1)=0,|A(t)|>0$. 求满足条件的一个多项式 $f(t)$.

解：(1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，将 $y_i=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$ 代入得线性方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0,\\ \cdots\cdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n.\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

是转置的范德蒙德行列式，值为 $\prod\limits_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$，此值非零，因为 $x_0,\cdots,x_n$ 两两不同，由克莱姆法则有唯一解，得证.

(2) $|A(t)|=(2t-1)^2+f(t)^2>0$，故只要 $t=1/2$ 时，有 $f(1/2)\neq 0$ 即可.

令 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2, f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$ 可解得 $f(t)=4t(1-t)$.

线性代数期中试卷 答案

姓名________ 学号____________________专业__________ 考试时间 2017.4.22

一. 解答下列各题(8分×5=40分)

1. 设 A 为3阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵. 已知 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解：$|(3A)^{-1}-2A^*|=|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A|^{-1}=-16/27$.

2. 设 A 为 n 阶方阵且满足 $A^2=-A$. 证明：$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

解：由 $A^2=-A$ 得 $A^2+A=A(A+E)=A(E+A)=O$，故 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)\leq n$.
又有 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=\mathrm{r}(-A)+\mathrm{r}(E+A)\geq \mathrm{r}(-A+(E+A))=\mathrm{r}(E)=n$.
故有 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E+A)=n$.

3. 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶的可逆方阵，C 是 $m\times n$ 的矩阵，O 是零矩阵. 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

证：设 $D=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 满足 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$，

得 $\begin{cases} XC+YB &= E, \\ XA &= O, \\ ZC+WB &= O, \\ ZA &= E. \end{cases}$，利用 A、B 可逆解得 $\begin{cases} X=O, \\ Y=B^{-1}, \\ Z=A^{-1}, \\ W=-A^{-1}CB^{-1}. \end{cases}$，

故 $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆，且逆矩阵为 $D=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$ ，$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $P^{-1}AP$ 和 $A^{-3}-A$.

解：易知 $P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
因为 $P^{-1}(A^{-3}-A)P=(P^{-1}AP)^{-3}-P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=O$，故 $A^{-3}-A=O$.

5. 设 n 阶方阵 A 的秩为 $r<n$，证明存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B 使得 $AB=O$，这里 O 表示零矩阵.

证：因为 A 的秩为 $r<n$，故 $Ax=\theta$ 的基础解系含 $n-r$ 个列向量，且线性无关，设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$.
令 $B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\eta_1,\cdots,\eta_r)$，其中 $\eta_1=\cdots=\eta_r=\theta$，则 $\mathrm{r}(B)=n-r$，且 $AB=O$.

二.(12分) 若方阵 X 满足 $X^2=X$，则称 X 是幂等的. 设 A 和 B 是同阶的幂等方阵，证明 $(A+B)$ 是幂等的当且仅当 $AB=BA=O$，这里 O 表示零矩阵.

证：因为 $A^2=A, B^2=B$，所以有
$(A+B)^2=A+B\Leftrightarrow A+AB+BA+B=A+B\Leftrightarrow AB+BA=O$.
分别对 $AB+BA=O$ 左乘 A 和右乘 A 得到 $AB+ABA=O, ABA+BA=O$.
从而得 $AB=BA$，又由 $AB+BA=O$ 得 $AB=BA=O$.
易知 $AB=BA=O$ 可得 $AB+BA=O$，故 $(A+B)^2=A+B$ 当且仅当 $AB=BA=O$.

三. (12分) 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = a_1 \\ x_2 - x_3 & = a_2 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ x_{n-1} - x_n & = a_{n-1} \\ x_n - x_1 & = a_n \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. 在有解的情况下，求方程组的解集.

证: "$\Rightarrow$" 设有解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足方程组，将方程组的所有方程相加得 $0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
"$\Leftarrow$" 将方程组写成矩阵形式: $Ax = b$,

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{增广矩阵 } B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ -1 & & & & 1 & a_n \end{array}\right).$$

$$\text{将 } B \text{ 的所有行加到最后一行，利用 } a_1 + \cdots + a_n = 0 \text{ 得 } B \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & & & & a_1 \\ & 1 & -1 & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B'.$$

显然 $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) = n-1$，方程组有解.

$$\text{易知 } B' \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ & 1 & \cdots & 0 & -1 & a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{故方程组的一个特解为: } \gamma = \begin{pmatrix} a_1 + \cdots + a_{n-1} \\ a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

对应齐次方程组的基础解系为: $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T$，从而方程组的解集为: $\gamma + k\alpha, k \in R$.

$$\text{四.(12分) 解带参数方程组} \begin{cases} x_1 + (\lambda^2+1)x_2 + 2x_3 & = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+1)x_3 & = 0, \\ x_1 + (2\lambda+1)x_2 + 2x_3 & = 2. \end{cases}$$

解: 对方程组的增广矩阵作变换

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda^2+1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda+1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{array}\right).$$

$$\text{若 } \lambda \neq 0, \lambda \neq 2, \text{ 则 } B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 1/\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{故方程组有唯一解: } \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{若 } \lambda = 2, \text{ 则 } B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 21/8 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/8 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{故方程组有无穷多解，通解为: } \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{若 } \lambda = 0, \text{ 则 } B \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{因为 } \mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(B), \text{故方程组无解.}$$

$$\text{五.(12分) 计算行列式} \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b & a \\ b & b & \cdots & b & a & b \\ b & b & \cdots & a & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b & b \\ a & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}.$$

解：将行列式的第 n 列两两交换到第1列，然后将新的行列式的第 n 列两两交换到2列，一直交换下去，直到将行列式的第 n 列交换到第 $n-1$ 列.

共交换了：$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$，得到

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n(n-1)/2}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a-b & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

六.(12分) 设 A 和 X 为 n 阶方阵，且满足 $AX=A+2X$.

1. 证明：$AX=XA$;
2. 若 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$X$ 是三阶未知方阵，求解矩阵方程 $AX=A+2X$.

1. 证：$AX=A+2X \Rightarrow AX-2X-A=O \Rightarrow \frac{1}{2}(A-2E)(X-E)=E$.

故 $\frac{1}{2}(A-2E)=(X-E)^{-1}$，从而 $(X-E)\frac{1}{2}(A-2E)=\frac{1}{2}(XA-2X-A+2E)=E$，即 $XA-2X-A=O=AX-2X-A$，于是 $AX=XA$.

2. 解：移项得 $(A-2E)X=A$，于是

$$
\begin{aligned}
(A-2E,A) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

故 $X=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.