

# 南京大学大学数学试卷 答案

考试时间 2014.1.2 任课教师 \_\_\_\_\_ 考试成绩 \_\_\_\_\_

## 一. (24分) 填空题

1. 已知  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  则  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \underline{\underline{\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}}$

2. 函数  $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 2 \\ 3 & x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 5 & 4 & 2 & x \end{vmatrix}$  中  $x^3$  的系数是 -3

3. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为二阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $|B| = \underline{2}$

4. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  且存在3阶非零方阵  $B$ , 使  $BA = 0$ , 则  $a = \underline{1}$

5. 三阶方阵  $A, B$  满足  $I+B = AB$ , 其中  $I$  是单位矩阵,  $A$  有特征值  $3, -3, 0$ , 则  $B$  的特征值为  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1$

6. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$  是合同矩阵, 即存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $C^T A C = B$ , 其中  $C = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$  有多种答案, 如  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$

## 二. (24分) 选择题

1. 已知  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则下列向量组也是  $Ax = 0$  的基础解系是 ( A )  
 A.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$                       B.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$   
 C.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  的一个等价的向量组                      D.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  的一个等秩的向量组

2. 设有3阶非零实的方阵  $A = (a_{ij})$ ,  $|A|$  的每个元素  $a_{ij}$  都等于它自己的代数余子式, 则  $A$  的秩为 ( D )  
 A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

3. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  均是  $n$  维 ( $n \geq 2$ ) 向量, 则 ( D )  
 A.  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\beta_1, \beta_2$  线性无关, 必有  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性无关;  
 B.  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关,  $\beta_1, \beta_2$  线性相关, 必有  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性相关;  
 C.  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\beta_1, \beta_2$  线性相关, 必有  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  线性无关;  
 D.  $\alpha_1, \alpha_2$  线性相关,  $\beta_1, \beta_2$  线性无关, 必有  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2$  可能线性无关, 也可能线性相关。

4. 已知  $A$  是四阶矩阵, 秩  $r(3I - A) = 2$ , 其中  $I$  是单位矩阵, 则  $\lambda = 3$  是  $A$  的 ( C )  
 A. 一重特征值                      B. 二重特征值                      C. 至少是二重特征值                      D. 至多是二重特征值

5. 设  $A$  为  $m \times s$  矩阵,  $B$  为  $s \times n$  矩阵,  $r(M)$  表示矩阵  $M$  的秩, 则  $ABx = 0$  和  $Bx = 0$  是同解方程组的一个充分条件是 ( C )  
 A.  $r(B) = s$                       B.  $r(B) = n$                       C.  $r(A) = s$                       D.  $r(A) = m$

6. 设  $A, B$  都是  $n$  阶实对称可逆矩阵, 则 ( B )  
 A. 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$                       B. 存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使得  $PAQ = B$   
 C. 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^T AP = B$                       B.  $AB - BA$  有可能等于单位矩阵

三. (10分) 已知线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b \end{cases}$$
, 问  $a, b$  各取何值时, 方程组无解? 有唯一解?

有无穷多解? 有无穷多解时求出通解。

解: 对增广矩阵作初等行变换:

$$(A, b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{array} \right).$$

当  $a \neq 2$  时,  $r(A) = r(A, b) = 4$ , 有唯一解。

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } (A, b) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array} \right).$$

此时当  $b \neq 1$  时,  $r(A, b) = 4 > r(A) = 3$ , 方程组无解。

当  $b = 1$  时,  $r(A) = r(A, b) = 3 < 4$ , 方程组有无穷多组解, 易知通解为  $(-8, 3, 0, 2)^T + k(0, -2, 1, 0)^T, k \in R$ .

四. (10分) 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 证明: (1) 若对任意的  $n$  维向量  $\xi$ , 有  $\xi^T A \xi = 0$ , 则  $A$  是反对称矩阵, 即  $A = -A^T$ ; (2) 若  $A$  是奇数阶反对称矩阵, 求出其行列式  $|A|$  的值。

解: (1) 取  $\xi = e_i$ , 有  $e_i^T A e_i = a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

再取  $\xi = e_i + e_j$ , 有  $\xi^T A \xi = e_i^T A e_i + e_i^T A e_j + e_j^T A e_i + e_j^T A e_j = a_{ij} + a_{ji} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n$ .

故有  $a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n$ , 即  $A = -A^T$ .

(2) 当  $A$  的阶数  $n$  为奇数时,  $|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$ , 故有  $|A| = 0$ .

五. (12) 已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$  ( $a > 0$ ) 通过正交变换  $x = Uy$  可化为标准形  $2y_1^2 + by_2^2 + 2y_3^2$ . (1) 求参数  $a, b$  及正交变换  $U$ ; (2) 二次型是否正定 (给出一个理由)。

$$\text{解: 记变换前后二次型的矩阵分别为 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & a \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

于是  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = y^T (U^T A U) y = y^T B y$ ,

即  $U^T A U = U^{-1} A U = B$ , 故矩阵  $A, B$  相似 (合同),

从而有  $|A| = |B|, \text{tr} A = \text{tr} B$ . 即  $-(a+10)(a-2) = 4b, -3 = 4+b$ ,

解得  $b = -7, a = 4$  (其中  $a = -12 < 0$  不合题意, 舍去)。

$$\text{所以 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{显然 } A \text{ 的特征值为 } \lambda = 2 \text{ (二重)}, -7.$$

解方程组  $(2E - A)x = \theta$  得无关特征向量  $\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$ , 标准正交化得  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T$ .

解方程组  $(-7E - A)x = \theta$  得单位特征向量  $\gamma_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^T$ .

令  $U = (\gamma_1, \gamma_3, \gamma_2)$ , 则  $U$  是正交矩阵, 且  $U^T A U = U^{-1} A U = B$ .

(2) 二次型不是正定的, 理由可任意选择以下一个:

(1) 特征值不全大于 0; (2) 正惯性指数为  $2 < 3$ ;

(3) 二阶顺序主子式  $< 0$ ; (4)  $f(0, 1, 0) = -2 < 0$  等.

六. (10分) 设有实系数线性方程组: 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, n,$$
 其中  $|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|, i = 1, 2, \dots, n$ , 证明此方程组有唯一解。

证: 只要证明系数矩阵  $A$  的行列式不等于 0 即可。用反证法。

假设  $|A| = 0$ , 则  $Ax = \theta$  有非零解  $x = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ . 令  $|t_i| = \max\{|t_1|, |t_2|, \dots, |t_n|\}$ , 则  $|t_i| > 0$ .

考虑第  $i$  个方程  $a_{i1}t_1 + \dots + a_{in}t_n = 0$  可得  $a_{ii}t_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}t_j$ ,

于是有  $|a_{ii}||t_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}t_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}||t_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}||t_i|$ .

因  $|t_i| > 0$ , 故  $|a_{ii}| \leq |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|$ , 与题设矛盾. 故系数行列式不为 0, 方程组有唯一解.

七. (10分) 设线性变换  $A$  在自然基  $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$  下的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$  (1) 求  $A$  在基  $\alpha_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \alpha_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \alpha_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$  下的矩阵  $B$  (2) 设向量  $x = e_1 + 6e_2 - e_3$ , 求  $Ax$  在基  $e_1, e_2, e_3$  下的坐标.

解: (1) 设基  $e_1, e_2, e_3$  到基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的过渡矩阵为  $T$ , 则  $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 可以求得  $T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

则  $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(2)  $x$  在基  $e_1, e_2, e_3$  下的坐标是  $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 故  $Ax$  在基  $e_1, e_2, e_3$  下的坐标为  $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -40 \end{pmatrix}$ .