线性代数习题解答

南京大学出版社

壹：

《线性代数讲义》(2012) 习题

习题一 P_{27}

1. 用对角线法则计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times3\times3-2\times2\times2-1\times1\times1$
$= 6+6+6-27-8-1 = -18$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0+a\times c\times(-b)+b\times(-a)\times(-c)-b\times0\times(-b)-a\times(-a)\times0-0\times c\times(-c)$
$=0$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$ $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $(\omega^3=1, \omega\neq1)$ $\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$=1\times\omega\times\omega^2+1\times\omega^2\times1+1\times1\times\omega^2-1\times\omega\times1-1\times1\times\omega-1\times\omega^2\times\omega^2$
$=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega-\omega = 3\omega^2-3\omega = -3\sqrt{3}i$

2. 利用行列式解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=2 \\ -3x_1+3x_2+2x_3=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2ax_1-3bx_2+cx_3=0 \\ 3ax_1-6bx_2+5cx_3=2abc \\ 5ax_1-4bx_2+2cx_3=3abc \end{cases}$ $(abc\neq0)$

解：(1) 因系数行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$

故方程组有唯一解

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{27}$

$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{37}{27}$

$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$

(2) 因系数行列式

$\Delta=\begin{vmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -3b & c \\ 0 & -\frac{3}{2}b & \frac{7}{2}c \\ 0 & \frac{7}{2}b & -\frac{1}{2}c \end{vmatrix} = -23abc \neq 0$

故原方程组有唯一解

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}0 & -3b & c\\ 2abc & -6b & 5c\\ 3abc & -4b & 2c\end{vmatrix}=\frac{-23ab^2c^2}{-23abc}=bc$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}2a & 0 & c\\ 3a & 2abc & 5c\\ 5a & 3abc & 2c\end{vmatrix}=\frac{-23a^2bc^2}{-23abc}=ac$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}2a & -3b & 0\\ 3a & -6b & 2abc\\ 5a & -4b & 3abc\end{vmatrix}=\frac{-23a^2b^2c}{-23abc}=ab \quad \square$$

3. 计算下列行列式：

(1) ✓
$$\begin{vmatrix}10 & 2 & 8\\ 15 & 3 & 12\\ 20 & 12 & 32\end{vmatrix}\left[\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=\!=}-\begin{vmatrix}2 & 10 & 8\\ 3 & 15 & 12\\ 12 & 20 & 32\end{vmatrix}\underset{c_3-4c_1}{\overset{c_2-5c_1}{=\!=}}-\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 12 & -40 & -16\end{vmatrix}=0\right]\overset{c_2-\frac{3}{2}c_1}{=\!=}\begin{vmatrix}10 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 0\\ 20 & 12 & 32\end{vmatrix}=0$$

(2) ✓
$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 4 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\underset{c_2\leftrightarrow c_3}{\overset{c_1\leftrightarrow c_4}{=\!=}}\begin{vmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=256$$

⚠ 变换要写清

(3)
$$\begin{vmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ 0 & b & a & 0\\ b & 0 & 0 & a\end{vmatrix}\overset{\text{按第1行展开}}{=\!=}a\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ b & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & b & 0\\ b & 0 & a\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}a & 0\\ b & a\end{vmatrix}+b^2\begin{vmatrix}0 & b\\ b & a\end{vmatrix}=a^4-b^4$$

(4)
$$\begin{vmatrix}5 & 0 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\underset{c_2\leftrightarrow c_4}{\overset{c_1\leftrightarrow c_4}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 4 & 2\end{vmatrix}\underset{\substack{c_3-4c_1\\ c_4-5c_1}}{\overset{c_2-c_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -6 & -4\\ 0 & 5 & -6 & -3\end{vmatrix}\underset{c_3-\frac{5}{2}c_2}{\overset{c_4-c_3}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-7$$

(5) ✓
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\underset{\substack{c_3-3c_1\\ c_4-4c_1}}{\overset{c_2-2c_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & -2 & -7 & -11\\ 0 & -7 & -10 & -13\end{vmatrix}\underset{c_4-7c_2}{\overset{c_3-2c_2}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 36\end{vmatrix}\overset{c_4+\frac{4}{3}c_3}{=\!=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 40\end{vmatrix}=+120$$

叁

(6) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & v \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & 0 & d \\ 0 & y & 0 \\ u & 0 & v \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ x & 0 & 0 \\ 0 & u & v \end{vmatrix} = ay\begin{vmatrix} c & d \\ u & v \end{vmatrix} - bx\begin{vmatrix} c & d \\ u & v \end{vmatrix}$

$= acvy - aduy - bcvx + bdux$

$= (ay-bx)(cv-du)$ □

4. 证明以下各式：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$　　(2) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & ax & a^2+x^2 \\ 1 & ay & a^2+y^2 \\ 1 & az & a^2+z^2 \end{vmatrix} = a(x-y)(y-z)(z-x)$

(4) $D_n = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$

(5) $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \quad (a \neq b)$

证明：(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - ab\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} 2a & a+b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= a^2(a-b) - 2ab(a-b) + b^2(a-b)$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2) = (a-b)^3$

(2) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-ar_1-br_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+a+b+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & ax & a^2+x^2 \\ 1 & ay & a^2+y^2 \\ 1 & az & a^2+z^2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 1 & y & a^2+y^2 \\ 1 & z & a^2+z^2 \end{vmatrix} \overset{c_3-a^2c_1}{=\!=} a\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = a(y-x)(z-y)(z-x)$ ~~$a(x-y)(y-z)(z-x)$~~

(4) $n=2$时，$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix} = \lambda^2+a_1\lambda+a_2$ 成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1} \overset{按第一列}{\underset{展开}{=\!=}} \lambda D_k + (-1)^{k+2} a_{k+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{k\times k} = \lambda D_k + a_{k+1}$$

$$= \lambda(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k) + a_{k+1}$$

$$= \lambda^{k+1} + a_1\lambda^k + \cdots + a_k\lambda + a_{k+1}$$

由数学归纳法可知，原等式对任意 $n\in N$ 成立

(5) $n=1$时，$D_1 = a+b$，$\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$，即当$n=1$时原等式成立

假设当 $n=k$ ($k-1$) 时等式成立，则当 $n=k+1$ 时

$$D_{k+1} \overset{按第一列}{\underset{展开}{=\!=}} (a+b)D_k - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & ab \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{k\times k} = (a+b)D_k - abD_{k-1}$$

$$= (a+b)\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b} - ab\frac{a^k-b^k}{a-b}$$

$$= \frac{a^{(k+1)+1}-b^{(k+1)+1}}{a-b}$$

由数学归纳法可知，原等式对任意 $n\in N$ 成立 □

5. 求解下列方程的全部解：

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$ (2)✓ $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 4 & x^2 \\ 1 & -1 & 8 & x^3 \end{vmatrix} = 0$

~~同4(2)~~

值

解：(1)

计算行列式

$$\begin{vmatrix}1+x&2&3\\1&2+x&3\\1&2&3+x\end{vmatrix} \xlongequal[r_2-r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix}x&0&-x\\0&x&-x\\1&2&3+x\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}x&-x\\2&3+x\end{vmatrix} - x\begin{vmatrix}0&x\\1&2\end{vmatrix}$$

$$= x(x^2+5x)+x^2 = x^3+6x^2$$

故原方程等价于 $x^3+6x^2=0$，其解为 $x=0$(二重)或 $x=-6$

(2) 计算行列式

$$\begin{vmatrix}x&a&b&c\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\c&b&a&x\end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix}x+a+b+c&x+a+b+c&x+a+b+c&x+a+b+c\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\c&b&a&x\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&x&c&b\\b&c&x&a\\c&b&a&x\end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-br_1\\r_4-cr_1}]{r_2-ar_1} (x+a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-a&c-a&b-a\\0&c-b&x-b&a-b\\0&b-c&a-c&x-c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_4\to r_3]{r_2+r_3\to r_2} (x+a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-a-b+c&x-a-b+c&0\\0&0&x+a-b-c&x+a-b-c\\0&b-c&a-c&x-c\end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&b-c&a-c&x-c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\to r_4]{r_4-(b-c)r_2-(a-b)r_3} (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&x-a+b-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)$$

故原方程的解为

$x_1=-b-c$，$x_2=a+b-c$，$x_3=-a+b+c$，$x_4=a-b+c$

(3) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 4 & x^2 \\ 1 & -1 & 8 & x^3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式}]{\text{范德蒙}} (-1-1)(2-1)(x-1)(2-(-1))(x-(-1))(x-2)$$

$$= -6(x-1)(x+1)(x-2)$$

故原方程有三个解，$x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$. □

6. 计算下列各题：

(1) 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式，求 A_{32} 及 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

解：$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 8$

据行列式按行展开可知

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-3r_1\to r_3 \\ r_4-r_1\to r_4}]{r_2+5r_1\to r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 16 & -7 & 6 \\ 0 & -8 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+\frac{1}{2}r_2\to r_3 \\ r_4+\frac{1}{2}r_2\to r_4}]{r_3-r_4\to r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 16 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$= ~~1\times16\times(\tfrac{7}{2}\times(-2)-\tfrac{3}{2}\times(-1))~~ -1\times16\times(-\tfrac{3}{2})=24.$$ □

(2) 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$ 求 x,y,z. $(x,y,z\in R)$

解：$D=1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$=1-x^2-y^2-z^2$ 故 $x^2+y^2+z^2=0$ 即 $x=y=z=0$

□

柒

(3) $D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$

解：$D \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1+x & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1\to r_2\\ r_4-(1+x)r_1+r_4}]{r_2-r_1\to r_2} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 0 & -x & 0 & +y\\ 0 & 0 & y & y\\ 0 & -x & -x & y-x+yx\end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4-r_2\to r_4} -\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1-y\\ 0 & -x & y & +y\\ 0 & 0 & y & y\\ 0 & 0 & -x & -x+yx\end{vmatrix} = x^2y^2$ □

7. 计算下列n阶行列式 $(n\geq 2)$

(1) $D_n=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x & y & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & & \ddots & y\\ y & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}_{n\times n}$

解：~~D 按 Dn 沿第一列展开得~~

当 $n=2$ 时，$D_2=x^2-y^2$

当 $n=3$ 时，$D_3=\begin{vmatrix}x & y & 0\\ 0 & x & y\\ y & 0 & x\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}x & y\\ 0 & x\end{vmatrix} + y\begin{vmatrix}y & 0\\ x & y\end{vmatrix} = x^3+y^3$

$n=4$ 时，$D_4=\begin{vmatrix}x & y & 0 & 0\\ 0 & x & y & 0\\ 0 & 0 & x & y\\ y & 0 & 0 & x\end{vmatrix} = x\begin{vmatrix}x & y & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}y & 0 & 0\\ x & y & 0\\ 0 & x & y\end{vmatrix} = x^4-y^4$ ~~$= x^4+xy^3-y^4$~~

$D_n \xlongequal{\text{按第一列展开}} x\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & \ddots & y\\ 0 & \cdots & & 0 & x\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y & 0 & \cdots & 0\\ x & \ddots & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & x & y\end{vmatrix} = x^n+(-1)^{n+1}y^n$ □

日期：

(2) 讲 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ ①原矩阵规律不易看出.

解: $D_n \xlongequal[2\le i\le n]{r_i - r_1 \to r_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$ □

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & \cdots & a & x \end{vmatrix}_{n\times n}$

解: $D_n \xlongequal[1\le i\le n-1]{r_i - r_n \to r_i} \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & a-x \\ 0 & x-a & \ddots & \vdots & a-x \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x-a & a-x \\ a & \cdots & a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_n + \sum_{1\le i\le n-1} c_i \to c_n} \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x-a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x-a & 0 \\ a & a & \cdots & a & x+(n-1)a \end{vmatrix}$

$= (x-a)^{n-1}(x+(n-1)a)$ □

(4) ✓ $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}_{n\times n}$

解: $D_n \xlongequal[2\le i\le n]{r_i - r_1 \to r_i} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - \sum_{3\le i\le n} c_i \to c_1} \begin{vmatrix} 2n-3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$

$= -2(n-2)!$ □

玖

(5) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$ ⚠ 注意不能用 4(5)

解：猜想：$D_n = n+1$

当 $n=2$ 时，$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

假设当 $n=k$ 及 $k-1$ 时猜想成立，即 $D_k = k+1$，$D_{k-1} = k$

则当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1} = 2D_k - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k} = 2D_k - D_{k-1}$$

$$= 2(k+1) - k = k+2 = (k+1)+1.$$

故当 $n=k+1$ 时猜想也成立

由数学归纳法可知，猜想对任意 $n\in N$ 成立. □

(6) $D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解：$D_n \xlongequal[C_{n-1}+C_{n-1}\to C_n]{C_2+C_1\to C_2,\ C_3+C_2\to C_3,\ \cdots} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & 0 \\ 1 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n a_1 \cdots a_{n-1}$ □

8. 用克莱姆法则解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \omega y + \omega^2 z = \omega \\ x + \omega^2 y + \omega z = \omega^2 \end{cases}$，$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

解：(1) 经计算得（步骤可省略） 检验结果

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&2&0&-1\\2&0&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&-2&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&0&1&0\end{vmatrix}=2$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\-1&2&0&-1\\1&0&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&3&1&-1\\0&-1&0&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_3]{r_3-3r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-2&-4\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\1&-1&0&-1\\2&1&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&-2&-1&-1\\0&-1&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_4}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&3\\0&-1&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_2]{r_4\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-1&-2\\0&0&1&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}=-2$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\1&2&-1&-1\\2&0&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&-2&-1\\0&-2&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&-2\\0&0&-1&0\end{vmatrix}=-2$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\1&2&0&-1\\2&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&-1&-2\\0&-2&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=4$$

故原方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=2.$$

(2) 经计算得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}\xlongequal{\text{范德蒙}}(\omega-1)(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)=-3\sqrt{3}i$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega&\omega&\omega^2\\\omega^2&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=0\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=-3\sqrt{3}i,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega\\1&\omega^2&\omega^2\end{vmatrix}=0$$

故原方程组有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}=0,\quad y=\frac{D_2}{D}=1,\quad z=\frac{D_3}{D}=0\qquad\square$$

拾壹

9. 问λ取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+3x_2+4x_3=0 \\ -x_1+\lambda x_2=0 \\ \lambda x_2+x_3=0 \end{cases}$ 仅有零解？

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3-2\lambda$$

所以原方程组仅有零解 $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{3}{2}$

即当 $\lambda\neq\frac{3}{2}$ 时原方程组仅有零解 ▯

10. 问λ、μ取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\mu x_2+x_3=0 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解？

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三行}} -\mu\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mu(\lambda-1)$$

所以原方程组有非零解 $\Leftrightarrow D=0 \Leftrightarrow \mu=0$ 或 $\lambda=1$

即当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时原方程组有非零解 ▯

✓ 11. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$ 有非零解，问a、b须满足什么条件？

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1-a \\ a-1 & b-a \end{vmatrix} = -4(b-a)+(a-1)^2$$

$$=-4b+(a+1)^2$$

由原方程组有非零解可知，a、b须满足

$D=0$，即 $-4b+(a+1)^2=0$ 即 $(a+1)^2=4b$ ▯

12. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x^2-2 & 3x-2 \\ 1 & x^2-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明：$f(x)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 0 & x^2-x-1 & x-1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2-x-1 & x-1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}=(x-1)(x^2-x)=x(x-1)^2$

故 $f(0)=0=f(1)$

由微分中值定理可知 $\exists\ \xi\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)=0$ □

另：$f'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$

故当 $\xi=\frac{1}{3}$ 时，$f'(\xi)=0$ □

习题二 P85

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求 $3A-B$，AB^T，A^TA (2,2,1) (2,2,2) (2,2,3)

(2) 若 X 满足 $A^T+X^T=B^T$ 求 X. (2,2,1)

解：(1) $3A-B=3\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AB^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$

$A^TA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $X=(X^T)^T=(B^T-A^T)^T=B-A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

答案

2.计算下列矩阵的乘积:

(2.2.3)

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$ ✓

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

✓ (3) $(1\ \ 2\ \ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

✓ (5) $\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_{11} & b_1a_{12} & \cdots & b_1a_{1n} \\ b_2a_{21} & b_2a_{22} & \cdots & b_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_{n1} & b_na_{n2} & \cdots & b_na_{nn} \end{pmatrix}$

(6) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ~~$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a$~~

$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=(a_{11}x_1^2+a_{21}x_1x_2+a_{31}x_1x_3)+(a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{32}x_2x_3)+(a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2)$

$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{21}+a_{12})x_1x_2+(a_{31}+a_{13})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$ □

3.设 $A=(1,2,3)$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2.2.3)

(1) 求 AB 和 BA

(2) 设 $C=BA$, 求 C^n $(n\in N)$

解：(1) $AB=(1,2,3)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=1$

$BA=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) 当 $n=1$ 时，$C=BA=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

当 $n\geq2$ 时，$C^n=(BA)^n=\underbrace{(BA)(BA)\cdots(BA)}_{n个}=B(AB)^{n-1}A=BA=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

故对 $n\in N$ 有 $C^n=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ □

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(1) 求 AB，BA，AC，问 $AB=BA$，$AB=AC$ 是否成立？(2.2.3)

(2) 计算 B^TA^T，以此验证 $B^TA^T=(AB)^T$. (2.2.4)

解：(1) $AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

故 ~~AB≠BA，AB=AC~~. $AB=BA$ 不成立，$AB=AC$ 成立.

(2) $B^TA^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

而 $(AB)^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

故 $B^TA^T=(AB)^T$ □

5. 举例说明下列命题是错误的：

(2.2.3) (1) 若 $A^2=A$，则 $A=E$ 或 $A=0$：取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

(2) 若 $AX=AY$，则 $X=Y$：取上题中 A，$X=B$，$Y=C$. □

(2)

拾伍

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(-3,2,1)$，计算 A^n，B^n，$n\in N$.

(2.2.3)

解：A^n：$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

猜想，$A^n=\begin{pmatrix}1&\binom{n}{1}&\binom{n}{2}\\0&1&\binom{n}{1}\\0&0&1\end{pmatrix}$ $n\geq 2$ $=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

证明：已证当 $n=1,2$ 时成立

假设当 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix}1&\binom{n}{1}&\binom{n}{2}\\0&1&\binom{n}{1}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\binom{n}{1}+1&\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\\0&1&\binom{n}{1}+1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\binom{n+1}{1}&\binom{n+1}{2}\\0&1&\binom{n+1}{1}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

B^n：记 $C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$D=(-3,2,1)$，则 $B=CD$，

因 $DC=(-3,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=4$

故 $B^n=(CD)^n=C(DC)^{n-1}D=4^{n-1}CD=4^{n-1}\begin{pmatrix}-3&2&1\\-6&4&2\\-9&6&3\end{pmatrix}$ □

7. 设矩阵 $A_{4\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B_{4\times4}=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_1)$.

(2.3) 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为4维列向量，且已知行列式 $|A|=2$，求行列式 $|A+B|$.

解：$|A+B|=|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1|$

$\overset{c_3-c_4}{=}|\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1|$

$\overset{c_1-c_3}{=}|2\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1|$

$=4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1|$

$\overset{c_3+c_1}{\underset{c_4-c_1}{=}}4|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|$

$=4|A|=8$ □

Date____/____/____
Mo Tu We Th Fr Sa Su

8. 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：(1) $a_{ij}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $\forall 1\le i,j\le 3$.
(2) $a_{11}\neq 0$.

选做 可放到第一章

计算行列式 $|A|$.

解：
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{a_{31}}{a_{11}}r_1]{r_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}r_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{A_{33}}{a_{11}} & -\frac{A_{32}}{a_{11}} \\ 0 & -\frac{A_{23}}{a_{11}} & \frac{A_{22}}{a_{11}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \frac{a_{33}}{a_{11}} & -\frac{a_{32}}{a_{11}} \\ 0 & -\frac{a_{23}}{a_{11}} & \frac{a_{22}}{a_{11}}\end{vmatrix} = a_{11}\frac{a_{33}a_{22}-a_{32}a_{23}}{a_{11}^2}$$

$$=a_{11}\frac{A_{11}}{a_{11}^2}=1 \quad \square$$

9. 设多项式 $f(x)=3x^2-2x+5$，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.
(2.2.3)

解：因
$$A^2=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-9&7\\3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}$$

故
$$f(A)=3A^2-2A+5E=3\times\begin{pmatrix}6&-9&7\\3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}21&-23&15\\5&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix} \quad \square$$

10. 设 A,B 为同阶方阵．试问关系式
(2.2.3)

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 是否成立？何时成立？

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

解：(1),(2)均不恒成立

(1) 成立 $\Leftrightarrow A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow BA=BA$ 即 A,B 可交换

(2) 成立 $\Leftrightarrow A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2 \Leftrightarrow AB=BA$． $\square$

拾柒

11. 若矩阵A,B满足AB=BA, 则称A与B可交换. 证明:

(1) 如果 B_1, B_2 都与A可交换, 那么 B_1+B_2, B_1B_2 也与A可交换.

(2) 若B与A可交换, 那么B的k(k>0)次幂 B^k 也与A可交换

证明: (1) $(B_1+B_2)A = B_1A+B_2A = AB_1+AB_2 = A(B_1+B_2)$ 即 B_1+B_2 与A可交换

$(B_1B_2)A = B_1(B_2A) = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = (AB_1)B_2 = A(B_1B_2)$

即 B_1B_2 与A可交换

(2) 当k=1时, B与A可交换.

假设 B^k 与A可交换, 则

$$B^{k+1}A = (B^kB)A = B^k(BA) = B^k(AB) = (B^kA)B = (AB^k)B = AB^{k+1}$$

即 B^{k+1} 与A可交换

由数学归纳法可知 B^k 与A可交换 $\forall k>0$ 成立 □

✓ 选作

12. 求所有与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 可交换的三阶矩阵.

解: 设 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ 与A可交换

则 $$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$$

即 $$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}+b_{13}&2b_{12}-2b_{13}\\b_{21}&b_{22}+b_{23}&2b_{22}-2b_{23}\\b_{31}&b_{32}+b_{33}&2b_{32}-2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}+2b_{31}&b_{22}+2b_{32}&b_{23}+2b_{33}\\b_{21}-2b_{31}&b_{22}-2b_{32}&b_{23}-2b_{33}\end{pmatrix}$$

因此 $\begin{cases}b_{13}=0,\quad b_{12}=0,\quad b_{31}=0,\quad b_{21}=0\\ 2b_{32}=b_{23},\quad 2b_{22}=3b_{23}+2b_{33},\quad 3b_{32}+b_{33}=b_{22}\end{cases}$ ~~…~~

可由第1个和第三个方程得到.

故所有与A可交换的3阶方阵为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 3b_{32}+b_{33} & 2b_{32} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad \square$$

13. 设A, B分别是n阶对称阵和n阶反对称阵，证明

(1) AB−BA是对称阵，AB+BA是反对称矩阵

(2) AB是反对称矩阵的充分必要条件是AB=BA.

证明：(1) $(AB-BA)^T = (AB)^T-(BA)^T = B^TA^T-A^TB^T = -BA-A(-B) = AB-BA$

即 AB−BA为对称阵

$(AB+BA)^T = (AB)^T+(BA)^T = B^TA^T+A^TB^T = -BA+A(-B) = -(AB+BA)$

即 AB+BA为反对称阵

(2) $(AB)^T=-AB \Leftrightarrow B^TA^T=-AB \Leftrightarrow -BA=-AB \Leftrightarrow AB=BA$. $\square$

14. 利用分块的方法，求下列矩阵的乘积.

(1) $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1\times(0,1)+(-2,0)\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\times(0,1)+\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & ac & 0 \\ 0 & a & 0 & ac \\ \hline 1 & 0 & c+bd & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c+bd \end{array}\right)$

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，E为2阶单位阵，矩阵B满足BA=B+2E. 求|B|.

解：由BA=B+2E 得 B(A−E)=2E 故 $|B|\times|A-E|=|2E|$

所以 $|B| = \frac{|2E|}{|A-E|} = \frac{4}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 2$ $\square$

16. 设A为n阶矩阵，满足 $AA^T=E$，$|A|<0$ 求 $|A+E|$

~~因 $AA^T=E$ 故 $|AA^T|=|E|=1$ 即 $|A|\times|A^T|=1$ 即 $|A|^2=1$ 又因 $|A|<0$，故有 $|A|=-1$~~

解：$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A|\times|E+A^T|=-|(E+A^T)^T|=-|A+E|$

因此 $|A+E|=0$ ▯

17. 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\end{pmatrix}$ 化为标准形.

解：$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&5&-5\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&1&+2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-2c_1]{c_2+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ▯

18. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{pmatrix}$，用行初等变换将A化为行简化梯形矩阵B

解：$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\4&2&5&4\\2&0&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&4&-1&2\\0&1&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_1]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1&5\\0&4&-1&2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&5\\0&0&3&-18\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&5\\0&0&1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&-6\end{pmatrix}$ ▯

19. 用初等变换把矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&7&8\\1&3&3&8\\-2&-5&+1&-8\end{pmatrix}$ 化为行简化梯形矩阵B，

并求初等矩阵 P_1,P_2,P_3,P_4 使 $B=P_4P_3P_2P_1A$.

解：$A=\begin{pmatrix}0&1&7&8\\1&3&3&8\\-2&-5&1&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\-2&-5&1&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{pmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\0&1&7&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$

故令 $P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$P_4=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

则有 $P_4P_3P_2P_1A=B$ ▯

20. 设 $A=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$. (1) 求可逆矩阵 P, 使 PA 为行简化梯形矩阵.

(2) 求一个可逆矩阵Q, 使 QA^T 为行简化梯形矩阵.

解: (1) $A=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_1}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{5r_2}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\frac{3}{5}r_2}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\end{pmatrix}$

故令 $P_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\\&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix}1&\\&5\end{pmatrix}$, $P_4=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{5}\\0&1\end{pmatrix}$

则 $P_4P_3P_2P_1A$ 为行简化梯形矩阵.

令 $P=P_4P_3P_2P_1=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{5}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&0\\\frac{2}{5}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$

则 PA 为行简化梯形矩阵

(2) $A^T=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1\\0&-4\\-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+5r_1}\begin{pmatrix}1&1\\0&-4\\0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-7r_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

故令 $Q_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $Q_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $Q_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$, $Q_4=\begin{pmatrix}1&&\\&-\frac{1}{4}&\\&&1\end{pmatrix}$, $Q_5=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $Q_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-7&1\end{pmatrix}$

则 $Q_6Q_5Q_4Q_3Q_2Q_1A^T$ 为行简化梯形矩阵.

令 $Q=Q_6Q_5Q_4Q_3Q_2Q_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-\frac{1}{4}&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\1&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&+\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\1&\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

则 QA^T 为行简化梯形矩阵. □

21. 求下列矩阵的秩:

$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\2&1&3&1\\a&b&a+b&a-b\\c&d&c+d&c-d\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}x&y&y&y\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{pmatrix}$

解: 将A化为行梯形矩阵.

$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_1-2r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 故 $r(A)=3$.

将B化为阶梯形矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&+1\\0&1&1&-1\\2&1&3&1\\a&b&a+b&a-b\\c&d&c+d&c-d\end{pmatrix}\xrightarrow[c_4-c_1+c_2]{c_3-c_1-c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&1&0&0\\a&b&0&0\\c&d&0&0\end{pmatrix}$$ 故 $r(B)=2$

将C化为行~~梯形矩阵~~标准形

$$C=\begin{pmatrix}x&y&y&y\\y&x&y&y\\y&y&x&y\\y&y&y&x\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}x&y&y&y\\y-x&x-y&0&0\\y-x&0&x-y&0\\y-x&0&0&x-y\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{pmatrix}x+3y&y&y&y\\0&x-y&0&0\\0&0&x-y&0\\0&0&0&x-y\end{pmatrix}$$

若 $\begin{cases}x-y=0\\x+3y=0\end{cases}$ 即 $x=y=0$ 则 ~~r(A)=0~~ $A=0$, $r(A)=0$

若 $\begin{cases}x-y=0\\x+3y\neq0\end{cases}$ 即 $x=y\neq0$，则 $C\to\begin{pmatrix}4x&x&x&x\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4x}r_1}\begin{pmatrix}1&\frac14&\frac14&\frac14\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 故 $r(A)=1$

若 $\begin{cases}x-y\neq0\\x+3y=0\end{cases}$ 即 $x=-3y\neq0$ 则 $C\to\begin{pmatrix}0&y&y&y\\0&-4y&0&0\\0&0&-4y&0\\0&0&0&-4y\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3\leftrightarrow r_4}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&-4y&0&0\\0&0&-4y&0\\0&0&0&-4y\\0&y&y&y\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{c_2\leftrightarrow c_3\\c_3\leftrightarrow c_4}]{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}-4y&0&0&0\\0&-4y&0&0\\0&0&-4y&0\\y&y&y&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+\frac14r_1+\frac14r_2+\frac14r_3\\-\frac{1}{4y}r_1,-\frac{1}{4y}r_2,-\frac{1}{4y}r_3}]{}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 故 $r(A)=3$

若 $\begin{cases}x-y\neq0\\x-3y\neq0\end{cases}$ 则 $C\to\begin{pmatrix}x+3y&y&y&y\\0&x-y&0&0\\0&0&x-y&0\\0&0&0&x-y\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{x-y}r_2\\\frac{1}{x-y}r_3\\\frac{1}{x-y}r_4}]{\frac{1}{x+3y}r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{y}{x+3y}&\frac{y}{x+3y}&\frac{y}{x+3y}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 故 $r(A)=4$.

「另：$|C|=(x+3y)(x-y)^3\neq0$ 故C满秩」 D

22. 试问下列矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵.

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&-2&-4\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$，$(a_i\in R)$

解：$|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ ~~故~~ A可逆 $\Leftrightarrow ad-bc\neq0$

又 $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ 故当 $ad-bc\neq0$ 时，$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

贰拾贰

· $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第3行}} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 故 B不可逆.

· $|C| = \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n$ 故 A可逆 $\Leftrightarrow a_1 \cdots a_n \neq 0 \Leftrightarrow a_1, \cdots, a_n \neq 0$

当 $a_1, \cdots, a_n \neq 0$ 时, $C^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$ □

23. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵, 求实数 x 和 y.

解: 由题意知 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x+y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故有 $\begin{cases} x = 1 \\ -x+y=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

经验证 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 确为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 □

24. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 试计算 A^TA, 由此给出 A的逆矩阵 A^{-1}.

解: $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9E$

故 $(\frac{1}{9}A^T)A = E$ 故 $A^{-1} = \frac{1}{9}A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ □

25. 设 A 为 n阶方阵且满足 $A^2+A-6E=0$. 求

(1) A^{-1}, $(A+E)^{-1}$ (2) $(A+4E)^{-1}$

解: (1) $A^2+A-6E=0 \Rightarrow A(A+E)=6E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}(A+E)$.

$(A+E)^{-1} = \frac{1}{6}A$

(2) $A^2+A-6E=0 \Rightarrow (A+4E)(A-3E) = -6E \Rightarrow (A+4E)^{-1} = -\frac{1}{6}(A-3E)$ □

贰拾叁

26. 设矩阵A与B满足 $AB = A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求B

解：$AB=A+2B \Rightarrow AB-2B=A \Rightarrow (A-2E)B=A$.

故若A-2E可逆，则可得 $B=(A-2E)^{-1}A$.

而 $|A-2E| = \begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix} \xlongequal[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{vmatrix}2&2&3\\0&-2&-\frac{3}{2}\\0&3&\frac{5}{2}\end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix}-2&-\frac{3}{2}\\3&\frac{5}{2}\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ 故A-2E可逆

~~又 $A^* = \begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0&-3\\3&15&-3\\3&-10&0\end{pmatrix}$~~

又 $A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $\begin{pmatrix}-1&4&3\\-1&5&3\\1&-6&-4\end{pmatrix}$

故 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{|A-2E|}(A-2E)^*=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$

所以 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$ □

27. 设矩阵A, B满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$ 求B.

解：$A^*BA=2BA-8E \Rightarrow (A^*-2E)BA=-8E$.

且 $|A|=\begin{vmatrix}1&&\\&-2&\\&&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，$|A^*-2E|=\left|\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}-2E\right|=\begin{vmatrix}-4&&\\&-1&\\&&-4\end{vmatrix}=-16\neq 0$

故A, A^*-2E 均可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&-\frac{1}{2}&\\&&1\end{pmatrix}$

$(A^*-2E)^{-1}=\frac{1}{|A^*-2E|}(A^*-2E)^*=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}4&&\\&16&\\&&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&&\\&-1&\\&&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

因此 $B=(A^*-2E)^{-1}(-8E)A^{-1}=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}$

$=-8\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&&\\&-1&\\&&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-\frac{1}{2}&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2&&\\&-4&\\&&+2\end{pmatrix}$ □

28. 设n阶方阵A与B满足 $A+B=AB$

(1) 证明：A−E为可逆阵.

(2) 已知 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 求A

(1) 证明：由 $A+B=AB$ 可知 $(A-E)(B-E)=E$ 故 $A-E$ 可逆

其逆为 $B-E$ □

(2) 解：由 $A+B=AB$ 知 $A(B-E)=B$ 由

由(1)的证明过程可知 $B-E$ 可逆，因此

$$A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&\\2&0&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}&\\&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$ □

习题三 P115. 用高斯消去法

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y-z=6\\x+y=3\\2x+y+3z=7\end{cases}$ (2) $\begin{cases}4x+3y+3z=19\\-3x+4y+7z=26\\6x-y-4z=-8\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x+2z=6\\-3x+5y=-11\\3y+4z=5\end{cases}$

解：(1) 对增广矩阵作行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&6\\1&1&0&3\\2&1&3&7\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\3&2&-1&6\\2&1&3&7\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&-1&-1&-3\\0&-1&3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&-1&-1&-3\\0&0&4&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}r_3]{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&3\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

因此原方程组有唯一解 $x=1, y=2, z=1$

(2) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&3&3&19\\-3&4&7&26\\6&-1&-4&-8\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&7&10&45\\-3&4&7&26\\0&7&10&44\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\-3&4&7&26\\0&7&10&44\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&4&7&29\\0&7&10&44\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&4&7&29\\0&-1&-4&-14\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&-1&-4&-14\\0&4&7&29\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&-1&-4&-14\\0&0&-9&-27\end{array}\right)\xrightarrow[-r_2]{-\frac{1}{9}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&4&14\\0&0&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

因此方程组有唯一解 $x=1, y=2, z=3$

(3) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ -3 & 5 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

故原方程组有唯一解 $x=2, y=-1, z=2$. □

(4) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2+7x_3+2x_4=6 \\ 4x_1+5x_2+x_3+3x_4=-1 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 3x_1+7x_2+2x_4=2 \\ 7x_1+15x_2-3x_3+5x_4=7 \\ 3x_1+9x_2-2x_3=2 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$

解：(4) 对增广矩阵作行初等变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 7 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-3r_2}]{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 5 & -14 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 13 & -4 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_4]{-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2-3r_3 \\ r_4-6r_3}]{r_1+5r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+3r_4 \\ r_1-5r_4}]{-\frac{1}{2}r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

所以原方程组有唯一解 $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=-2$.

(5) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 0 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & -3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_4]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 7 & 15 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4-2r_1 \\ \frac{1}{2}r_3}]{r_2-7r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2}]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -24 & 5 & 31 \\ 0 & 1 & 11 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -24 & 5 & 31 \\ 0 & 1 & 11 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+\frac{11}{2}r_3 \\ r_4-\frac{5}{2}r_3}]{r_1-12r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{2} & -14 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{2}{7}r_4]{-\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{2} & -14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+\frac{15}{2}r_4 \\ r_3-\frac{1}{2}r_4}]{r_1-17r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

故原方程组有唯一解 $x_1=-3, x_2=1, x_3=-1, x_4=2$. □

贰拾陆

(6) $\begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_2+2x_3+x_4=5 \\ x_3+2x_4+x_5=2 \\ x_4+2x_5=-5 \end{cases}$ ✓ (7) $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 2x_1+5x_2=5 \\ 2x_3+x_4+x_5=2 \\ x_3+2x_4+x_5=-1 \\ x_3+x_4+2x_5=-1 \end{cases}$

解：(6) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2&1&0&0&0&0 \\ 1&2&1&0&0&0 \\ 0&1&2&1&0&5 \\ 0&0&1&2&1&2 \\ 0&0&0&1&2&-5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3\leftrightarrow r_4 \\ r_4\leftrightarrow r_5}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&0&0&0 \\ 0&1&2&1&0&5 \\ 0&0&1&2&1&2 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 2&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_4]{r_2-r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&1&0&0&0 \\ 0&1&2&0&-2&10 \\ 0&0&1&0&-3&12 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 2&1&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&0&3&-12 \\ 0&1&0&0&4&-14 \\ 0&0&1&0&-3&12 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 2&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_5-r_2]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-5&16 \\ 0&1&0&0&4&-14 \\ 0&0&1&0&-3&12 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 2&0&0&0&-4&14 \end{array}\right) \xrightarrow{r_5-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-5&16 \\ 0&1&0&0&4&-14 \\ 0&0&1&0&-3&12 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 0&0&0&0&6&-18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}r_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&-5&16 \\ 0&1&0&0&4&-14 \\ 0&0&1&0&-3&12 \\ 0&0&0&1&2&-5 \\ 0&0&0&0&1&-3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3+3r_5 \\ r_4-2r_5}]{\substack{r_1+5r_5 \\ r_2-4r_5}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&-2 \\ 0&0&1&0&0&3 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&-3 \end{array}\right)$$

所以原方程组有唯一解 $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3,\ x_4=1,\ x_5=-3$.

(7) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&0&0&3 \\ 2&5&0&0&0&5 \\ 0&0&2&1&1&2 \\ 0&0&1&2&1&-1 \\ 0&0&1&1&2&-1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_4-\frac{1}{2}r_3 \\ r_5-\frac{1}{2}r_3}]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&0&0&3 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&2&1&1&2 \\ 0&0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-2 \\ 0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_5-\frac{1}{3}r_4 \\ r_3-\frac{2}{3}r_4}]{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&5 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&2&0&\frac{2}{3}&\frac{10}{3} \\ 0&0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-2 \\ 0&0&0&0&\frac{4}{3}&-\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{2}{3}r_4 \\ \frac{3}{4}r_5}]{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&5 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{5}{3} \\ 0&0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3} \\ 0&0&0&0&1&-1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_5]{r_3-\frac{1}{3}r_5} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&5 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&2 \\ 0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&-1 \end{array}\right)$$

故原方程组有唯一解 $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-1,\ x_5=-1$. □

习题二、29. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}，$(A^*)^{-1}$，$|(4E-A)^T(4E-A)|$.

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&4&3\end{vmatrix}=1\times2\times3=6$

$A^*=\begin{pmatrix}6&0&0\\3&3&0\\-6&-4&2\end{pmatrix}$ 故 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\3&3&0\\-6&-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

因 $AA^*=|A|E$ 故 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{6}&\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

因 $|4E-A|=\begin{vmatrix}-3&0&0\\1&-2&0\\-1&-4&1\end{vmatrix}=-3\times(-2)\times1=6$

故 $|(4E-A)^T(4E-A)|=|(4E-A)^T|\times|4E-A|=|4E-A|^2=36$ □

30. 设方阵A, B均为可逆阵，试给出 $X=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$，$Z=\begin{pmatrix}0&A\\B&C\end{pmatrix}$ 的逆阵，其中C为任意矩阵.

由此求矩阵G的逆矩阵，其中 $G=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$

解：因 $\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}A&0\\0&B^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&\\&E\end{pmatrix}=E$

$\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}B&0\\0&A^{-1}A\end{pmatrix}=E$

$\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&A\\B&C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}B&-B^{-1}CA^{-1}A+B^{-1}C\\0&A^{-1}A\end{pmatrix}=E$

故 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&A\\B&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$

直接计算可知 $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

所以 $G^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}&\\&\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ □

31. 试用矩阵的初等变换，求下列方阵A的逆

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ✓(2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解：(1) $(A,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1-9r_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[-r_2]{\frac{1}{3}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) $(A,E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-4r_2 \\ r_4-2r_2}]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_1-r_3 \\ r_2-2r_3 \\ r_4+2r_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+r_4 \\ r_3-r_4}]{r_1+r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$ □

32. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，求 X 使 $AX=B$

解：$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+5r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$ 求X使 $XA=B$

解 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\\1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&2\\-4&3&-3\\3&2&1\\1&-3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-2c_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-7&2\\-4&11&-3\\3&-4&1\\1&-5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+4c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&2\\-4&-1&-3\\3&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-2c_2]{c_1-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\55&-17&+38\\3&0&0\\-8&3&-4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[c_3-2c_2]{c_1-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&-1\\3&0&1\\-8&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1-c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\2&-1&1\\-7&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\2&-1&-1\\-7&4&1\end{pmatrix}$ 故 $X=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-7&4&1\end{pmatrix}$. □

33. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $AX=2X+A$. 求X.

解: 由 $AX=2X+A$ 得 $(A-2E)X=A$.

$(A-2E,A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&-2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}-1&0&1&1&-2&1\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_3]{-r_1,\ -r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&2&-1\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}$ 故 $X=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ □

34. 已知 $ABA=C$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 B^*.

解: 先求 A^{-1}.

$(A,E)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&1&3&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&-4&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

所以 $B=A^{-1}CA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=$ [illegible]

由 $ABA=C$ 知 $|A|\times|B|\times|A|=|C|$ 即 $(-4)\times|B|\times(-4)=1$ 所以 $|B|=\frac{1}{16}$

由 $BB^*=|B|E$ 得 $B^*=\frac{1}{|B|}B^{-1}$

由 $ABA=C$ 得 $B=A^{-1}CA^{-1}$ 于是 $B^{-1}=AC^{-1}A$.

所以 $B^*=\frac{1}{|B|}AC^{-1}A=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&+1\\1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&-1&+1\\2&3&+1\\1&0&4\end{pmatrix}$ □

35. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$，满足 $A^*=A^T$，若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等正数，求 a_{11}。

解：因为 $A^*=A^T$ 所以 $AA^T=AA^*=|A|E$

所以 $|AA^T|=||A|E|$ 即 $|A|^2=|A|^3$ 所以 $|A|=1$

所以 $AA^T=E$

而 AA^T 的 (1,1) 位元素为 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2$ 故 $3a_{11}^2=1$ 所以 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ □

36. 已知 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，试用初等变换法求 A^* 的逆矩阵。

X

解：$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=\!=}\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=-2$ 故 $|A|=|A^{-1}|^{-1}=-\frac{1}{2}$.

所以由 $AA^*=|A|E$ 知 ~~$A^*=\frac{1}{|A|}A^{-1}=-\frac{1}{2}A^{-1}$~~

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(|A|A^{-1})^{-1}=\left(-\frac{1}{2}A^{-1}\right)^{-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}A^{-1},E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&\frac{1}{2}&1&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1&0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&\frac{1}{2}&1&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1&0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-1&0&1&0\\0&-1&\frac{1}{2}&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_2\\-2r_3}]{-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0&-2&0\\0&1&-\frac{1}{2}&-1&0&0\\0&0&1&0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{2}&1&-2&0\\0&1&-\frac{1}{2}&-1&0&0\\0&0&1&0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{r_1-\frac{5}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&3&5\\0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&0&-2&-2\end{pmatrix}$$

所以 $(A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$ □

37. 设 n 阶方阵 $A,B,A+B$ 均可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆

证明：$A(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}=(E+AB^{-1})B(A+B)^{-1}=(A+B)(A+B)^{-1}=E$.

故 $(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}=A^{-1}$ 故 $(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A=E$

所以 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$ □

✓ 38. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$，$B,C$ 为同阶方阵，$BC^T=0$. 试用分块矩阵方法证明：$|AA^T|=|BB^T|\cdot|CC^T|$

证明：因 $BC^T=0$，故 $CB^T=(BC^T)^T=0$. 所以

$$|AA^T|=\left|\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}^T\right|=\left|\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}(B^T,C^T)\right|=\begin{vmatrix}BB^T&BC^T\\CB^T&CC^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}BB^T&0\\0&CC^T\end{vmatrix}=|BB^T|\times|CC^T|$$ □

31

39. 设 A, B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 个矩阵，若 $AB=E_m$，$BA=E_n$，求证 $m=n$，且 $B=A^{-1}$

证明：先证 $m=n$。反证法：假设 $m\neq n$，不妨设 $m>n$（因 $m<n$ 时类似），用 $BA=E_n$）。

将 A, B 分块 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，$B=(B_1, B_2)$，其中 A_1, B_1 为 n 阶方阵。

则 $AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2\\A_2B_1 & A_2B_2\end{pmatrix}=E_m=\begin{pmatrix}E_n & \\ & E_{m-n}\end{pmatrix}$

因此有 $\begin{cases}A_1B_1=E_n & ①\\A_1B_2=0 & ②\\A_2B_1=0 & ③\\A_2B_2=E_{n-m} & ④\end{cases}$

因为 A_1, B_1 均为 n 阶方阵，故由①知 A_1, B_1 均可逆

在②两边同左乘 A_1^{-1} 得 $B_2=0$，在③两边同右乘 B_1^{-1} 得 $A_2=0$

所以有 $A_2B_2=0$ 与④矛盾。

因此 $m=n$。

此时有 $AB=E_n=BA$，由定义知 $B=A^{-1}$ □

40. 设 $A=E-\alpha\alpha^T$，其中 E 为 n 阶单位阵，α 是 n 维非0列向量。

证明：(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\alpha^T\alpha=1$

(2) 当 $\alpha^T\alpha=1$ 时，A 是不可逆矩阵。

证明：(1) $A^2=A \Leftrightarrow (E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-\alpha\alpha^T \Leftrightarrow E-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-\alpha\alpha^T$

$\overset{\alpha^T\alpha\text{是数}}{\Leftrightarrow} E-2\alpha\alpha^T+(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=E-\alpha\alpha^T \Leftrightarrow (\alpha^T\alpha-1)\alpha\alpha^T=0$

$\overset{\alpha\alpha^T\text{非零矩阵}}{\Leftrightarrow} \alpha^T\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha\alpha^T=1$

(2) 当 $\alpha^T\alpha=1$ 时，$A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha\alpha^T\alpha=\alpha-\alpha=0$

假设 A 可逆，则上式两边同左乘 A^{-1} 得 $\alpha=0$。与 α 为非0列向量矛盾。

故假设不成立，因此 A 不可逆 □

41. 设 $A=E-2\alpha\alpha^T$，其中 E 为 n 阶单位阵，α 是 n 维非0列向量，且 $\alpha^T\alpha=1$。

证明：(1) A 是对称阵　(2) A 是幂幺阵（即 $A^2=E$）

证明：(1) $A^T=(E-2\alpha\alpha^T)^T=E^T-2(\alpha\alpha^T)^T=E-2\alpha\alpha^T=A$ 故 A 为对称阵

(2) $A^2=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$ □

42. 设矩阵A可逆，证明其伴随矩阵A^*也可逆，且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证明：因A可逆，故$|A|\neq0$.

由$AA^*=|A|E=AA^*$得 $\frac{A}{|A|}A^*=E=A^*\frac{A}{|A|}$

所以A^*可逆，且$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

另一方面，$(A^{-1})(A^{-1})^*=|A^{-1}|E=\frac{1}{|A|}E$ 所以 $(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}=(A^*)^{-1}$ □

43. 证明：设A是n阶可逆阵，证明$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，并求$|(A^*)^*|$.

证明：一方面 $AA^*=|A|E$ 两边同取行列式得 $|A|\times|A^*|=|A|^n$ 所以 $|A^*|=|A|^{n-1}$

另一方面 $(A^*)^*A^*=|A^*|E=|A|^{n-1}E$

所以 $(A^*)^*=|A|^{n-1}(A^*)^{-1}\overset{\text{上题}}{=}|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A$ □

44. 证明：$r(A_{m\times n})=r$充要条件是存在两个矩阵$P_{m\times r}$，$Q_{r\times n}$满足$A=PQ$，其中$r(P_{m\times r})=r=r(Q_{r\times n})$

证明：必要性：由$r(A_{m\times n})=r$可知∃可逆阵$P'_{m\times m}$，$Q'_{n\times n}$使

$$A=P'\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q'$$

将P'分块 $P'=(P,P_1)$ 将Q'分块 $Q'=\begin{pmatrix}Q\\Q_1\end{pmatrix}$，其中$P_{m\times r}$，$Q_{r\times n}$.

则 $A=(P,P_1)\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}(Q,Q_1)=PE_rQ=PQ$.

因 ~~$(P')^{-1}(P,P_1)$~~ $((P')^{-1}P,(P')^{-1}P_1)=(P')^{-1}(P,P_1)=E_m=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&E_{m-r}\end{pmatrix}$

故 $(P')^{-1}P=\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$ 为行简化梯形阵.

[又左乘$(P')^{-1}$相当于对P做有限次初等行变换]，所以$r(P)=r\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=r$.

同理可得 $r(Q)=r$.

充分性：因为$r(P_{m\times r})=r$ 所以∃可逆阵$P'_{m\times m}$使 ~~$P'P=$~~ $P=P'\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$

因为$r(Q_{r\times n})=r$ 所以∃可逆阵$Q'_{n\times n}$使 $Q=(E_r,0)Q'$.

所以 $A=PQ=P'\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}(E_r,0)Q'=P'\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q'$. [所以A可经有限次初等行和列变换化为$\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$] 所以$r(A)=r\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}=r$. □

33

向量组的线性表示 向量

45. 设 $\beta=(2,2,6)$，用 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(0,2,3)$，$\alpha_3=(0,0,3)$ 线性表示 β.

解：设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

则 $\begin{cases}2=x_1\\2=2x_1+2x_2\\6=3x_1+3x_2+3x_3\end{cases}$ 高斯消去得 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=1\end{cases}$

所以 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ □

46. 设 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,t)$

(1) 问 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

(2) — — — — — — — — — — 线性相关？

(3) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合.

解：设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$ 得线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+3x_3=0\\x_1+3x_2+tx_3=0\end{cases}$ 系数矩阵 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 方程组只有零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}\neq 0$，即 $t-5\neq 0 \Leftrightarrow t\neq 5$.

$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{vmatrix}=t-5$

故当 $t\neq 5$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

当 $t=5$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，此时，设 $\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，

则有 $\begin{cases}1=x_1+x_2\\3=x_1+2x_2\\5=x_1+3x_2\end{cases}$

对增广矩阵做初等行变换 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 故 $x_1=-1$，$x_2=2$

即 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ □

47. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\beta_1=p\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+t\alpha_2+2t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

问 p, t 为何值时，β_1,β_2,β_3 线性相关？线性无关？

解：令 $B=\begin{pmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{pmatrix}$，则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$

又知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，即 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|\neq 0$

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关 $\Leftrightarrow |(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|\neq 0 \Leftrightarrow |(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)||B|\neq 0 \Leftrightarrow |B|\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ $t\neq 0$ 且 $p\neq 1$.

[illegible]

$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三行}} -t\times\begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t(p-1)$

故当 $t\neq 0$ 且 $p\neq 1$ 时 β_1,β_2,β_3 线性无关

当 $t=0$ 或 $p=1$ 时，— — — 线性相关.

另解：设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，即 $(px_1+x_2+x_3)\alpha_1+(x_1+tx_2+x_3)\alpha_2+(x_1+2tx_2+x_3)\alpha_3=0$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有 $\begin{cases} px_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+tx_2+x_3=0 \\ x_1+2tx_2+x_3=0 \end{cases}$ 系数矩阵 $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{pmatrix}$.

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关 $\Leftrightarrow$ 上述方程组只有零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow t\neq 0$ 且 $p\neq 1$ □

48. 证明 n 维列向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：$D\neq 0 \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{vmatrix} \times |\alpha_1,\cdots,\alpha_n| \neq 0$

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\cdots,\alpha_n|^2\neq 0 \Leftrightarrow |\alpha_1,\cdots,\alpha_n|\neq 0 \xLeftrightarrow{\text{推论2.7.5}} \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 □

49. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，E 是 n 阶单位阵，

若 $AB=E$. 证明 B 的列向量线性无关.

证明：记 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$. 设 $x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=0$，则 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$ 即 $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$.

左乘 A 得 $AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$，因 $AB=E$ 得 $E\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$ 即 $x_1=\cdots=x_n=0$

故 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关. □

50. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维线性无关列向量. 证明：任意 n 维列向量 α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示.

证明：设 α 为任意 n 维列向量.

由推论 2.7.4 可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 线性相关,

又因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故由定理 2.7.2 可知 α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 唯一线性表示. □

51. 设向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，且 β 与 γ 都不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示.

证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价.

证明：因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且 β 不能由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，所以由例 2.7.8 可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性无关

而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，故由定理 2.7.2 知 γ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性表示.

同理可得 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 线性表示.

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma$ 等价. □

52. 已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\le n)$ 线性无关, β 是任意 n 维向量

证明：向量组 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中至多有一个向量能由其前面的向量线性表示.

证明：反证法. 假设 $1\le i<j\le n$, α_i,α_j 均可由前面向量线性表示.

不妨设 $\alpha_i=\lambda_0\beta+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}$

$\alpha_j=\mu_0\beta+\mu_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{j-1}\alpha_{j-1}$

断言 $\lambda_0\ne0$. 否则 $\alpha_i=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1}$, 可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i}$ 线性相关，与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾.

(性质(3)(4))

同理, $\mu_0\ne0$. 因此有 $\beta=\frac{1}{\lambda_0}(\alpha_i-\lambda_1\alpha_1-\cdots-\lambda_{i-1}\alpha_{i-1})$

$\beta=\frac{1}{\mu_0}(\alpha_j-\mu_1\alpha_1-\cdots-\mu_{j-1}\alpha_{j-1})$

故 $\frac{1}{\lambda_0}(\alpha_i-\lambda_1\alpha_1-\cdots-\lambda_{i-1}\alpha_{i-1})=\frac{1}{\mu_0}(\alpha_j-\mu_1\alpha_1-\cdots-\mu_{j-1}\alpha_{j-1})$

即 $\frac{1}{\mu_0}\alpha_j-\frac{\mu_{j-1}}{\mu_0}\alpha_{j-1}-\cdots-\frac{\mu_{i+1}}{\mu_0}\alpha_{i+1}-\left(\frac{\mu_i}{\mu_0}+\frac{1}{\lambda_0}\right)\alpha_i-\left(\frac{\mu_{i-1}}{\mu_0}-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_0}\right)\alpha_{i-1}\cdots-\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\alpha_1=0$

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_j$ 线性相关，与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾.

因此假设不成立. $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 中至多有一个向量可由其前面的向量线性表示 □

53. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组：

(1) $\alpha_1=(2,3)^T$, $\alpha_2=(1,-1)^T$, $\alpha_3=(0,4)^T$ (2) $\alpha_1=(1,2,2)^T$, $\alpha_2=(2,0,1)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$

(3) $\alpha_1=(1,3,-1,2)^T$, $\alpha_2=(3,5,-3,-1)^T$, $\alpha_3=(5,7,-5,-4)^T$, $\alpha_4=(2,2,-2,-3)^T$.

解：(1) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\3&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-\frac{5}{2}&4\end{pmatrix}=B$$ $r(B)=2$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

而 $(\alpha_1,\alpha_2)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}2&1\\0&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 秩为2，因此 α_1,α_2 线性无关，是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组，

因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为2.

(2) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-4&-1\\0&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B$$

因 $r(B)=3$ 故原向量组线性无关，是本身一个极大线性无关组，秩为3.

(3) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&3&5&2\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&-7&-14&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{7}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$r(B)=2$ 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

而 $(\alpha_1,\alpha_2)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\end{pmatrix}$ 秩为2，因此 α_1,α_2 线性无关，是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组

因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为2. □

54. 设向量组 $\alpha_1=(1,1,2,3)^T$, $\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,3,5)^T$, $\alpha_4=(4,-2,5,6)^T$, $\alpha_5=(-3,-1,-5,-7)^T$

求该向量组的一个极大线性无关组，并用以表示其余的向量.

解：对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&0&0&0&-6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B=(\beta_1,\cdots,\beta_5)$$

$r(B)=3$，且 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5)$ 的 $(\beta_1,\beta_2,\beta_5)=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-2&2\\0&0&-6\end{pmatrix}$ 秩为3，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 是一个极大线性无关组

易见 $\beta_3 = 2\beta_1 - \beta_2$，$\beta_4 = \beta_1 + \beta_2$

因此有 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$，$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ □

55. 已知向量组 $\beta_1 = (0,1,-1)^T$，$\beta_2 = (a,2,1)^T$，$\beta_3 = (b,1,0)^T$ 与向量组 $\alpha_1 = (1,2,-3)^T$，$\alpha_2 = (3,0,1)^T$，$\alpha_3 = (9,6,-7)^T$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

求 a，b 的值

解：对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 做初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{10}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$

~~对 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 做初等行变换~~

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{a}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & b-\frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

由题意，$r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 故 $b - \frac{a}{3} = 0$ 即 $a = 3b$.

因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，~~故方程组~~ 即 $\exists\, x_1, x_2, x_3$

s.t. $\beta_3 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ 即方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有解

对增广矩阵做初等变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & +3b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{5}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{1}{3}b \end{pmatrix}.$$

故 $\frac{5}{3} - \frac{1}{3}b = 0$ 即 $b = 5$，因此 $a = 15$. □

56. 设有向量组 $\alpha_1 = (1,0,2)^T$，$\alpha_2 = (1,1,3)^T$，$\alpha_3 = (1,-1,a+2)^T$ 和向量组 $\beta_1 = (1,2,a+3)^T$，$\beta_2 = (2,1,a+6)^T$，$\beta_3 = (2,1,a+4)^T$

试问：(1) 当 a 为何值时，两向量组等价？

(2) 当 a 为何值时，两向量组不等价？

解：~~方程~~ 两向量组等价⇔ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 ①.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出 ②

① $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X$ 有解，其中 X 为3阶方阵.

$$\text{即}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix}}_{A}X$$

"增广矩阵"

对 (A,B) 做初等行变换得.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&a&a+1&a+2&a\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right)$$

$$=\begin{cases}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&0&-2&0&-2\end{array}\right) & \text{若 } a=-1\\[2ex] \xrightarrow{\frac{r_3}{a+1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&1&1&1&\frac{a-1}{a+1}\end{array}\right) & \text{若 } a\neq-1\end{cases}$$

因此当 $a=-1$ 时矩阵方程 $B=AX$ 无解

当 $a\neq-1$ 时矩阵方程 $B=AX$ 有唯一解.

② $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)X$ 即 $A=BX$ 有唯一解.

对 (B,A) 做初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&1&1\\2&1&1&0&1&-1\\a+3&a+6&a+4&2&3&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-(a+3)r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1&1&1\\0&-3&-3&-2&-1&-3\\0&-a&-a-2&-a-1&-a&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{a}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1&1&1\\0&-3&-3&-2&-1&-3\\0&0&-2&-\frac{1}{3}a-1&-\frac{2}{3}a&a-1\end{pmatrix}$$

故矩阵方程 $A=BX$ 总有解

因此 ①+② $\Leftrightarrow$ $a\neq-1$.

所以当 $a\neq-1$ 时，两向量组等价. 当 $a=-1$ 时两向量组不等价. □

57. 设 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$, …, $\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 证明：两向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 有相同的秩

~~证明：由题意知 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&0\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$~~ $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&&\vdots\\\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

因此 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\0&\ddots&\vdots\\0&\cdots0&1\end{pmatrix}^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\&&&&-1\\0&\cdots&&0&1\end{pmatrix}$

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表示

因此两向量组等价. □

39.

58. 已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 有相同的秩，证明两向量组等价。

证明：设两向量组秩为 r，设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的一个极大线性无关组。

特别地 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关，又 $\xRightarrow{\text{这个数}} r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta)$ 的秩

故 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 的一个极大线性无关组。

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 均与 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 等价，因此两向量组等价 □

59. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 为同维向量，且 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r_1$，$r(\beta_1,\cdots,\beta_t)=r_2$，

$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=r_3$，证明：$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$

证明：设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组

$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的一个极大线性无关组。

则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 作为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$ 的子组线性无关，故 $r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\ge r_1$

$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 作为 — — — — — — — — — — $r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}\ge r_2$

另外，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 等价于 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$，$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价于 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价于 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$

所以 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}})\le\#\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}\}=r_1+r_2$ □

60. 设向量组 A 和向量组 B 的秩相等，且 A 组能由 B 组线性表示。

证明：A 组与 B 组等价。

证明：因向量组与任一极大线性无关组等价

故要证 A 组与 B 组等价，只需证 A 的一个极大线性无关组与 B 的一个极大线性无关组等价

又由 A 组能由 B 组线性表示可知 A 的任一极大线性无关组可由 B 的任一极大线性无关组表出。

因此可以假设 A 组与 B 组均为线性无关组。

另外，不妨假设 A 组与 B 组为同维列向量：A: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，B: $\beta_1,\cdots,\beta_r$.

则由 A 组能由 B 组线性表示可知 ∃ r 阶方阵 P s.t. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)P$.

故 $r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r((\beta_1,\cdots,\beta_r)P)\le r(P)$ 因此 $r(P)=r$ 即 P 满秩 故 P 可逆

于是有 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)P^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$ 故 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

因此两向量组等价. □

61. 设 A,B 都是 $m\times n$ 阶矩阵, 证明 A 与 B 等价的充分必要条件是 $r(A)=r(B)$.

证明: 由定理2.6.4可知 A 等价于 $\begin{pmatrix} E_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B 等价于 $\begin{pmatrix} E_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此 A,B 等价 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价于 $\begin{pmatrix} E_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r(A)=r(B)$ □

62. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 且 $m>n$ 证明: $r(AB)<m$.

证明: $r(AB)\le r(A)\le \min\{m,n\}=n<m$. □

习题三 P98 (2013版)

2. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in\mathbb{R}^n$ 是非齐次方程组 $Ax=b$, $b\neq 0$ 的解. 证明 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+\cdots+k_s=0$ 其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是 $Ax=b$ 的解, 因此 $A\alpha_1=b,\cdots,A\alpha_s=b$.

故 β 是 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow A\beta=0 \Leftrightarrow k_1A\alpha_1+\cdots+k_sA\alpha_s=0 \Leftrightarrow k_1b+\cdots+k_sb=0$

$\Leftrightarrow (k_1+\cdots+k_s)b=0 \Leftrightarrow k_1+\cdots+k_s=0$. □

3. 证明 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 是同解方程组, 其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

证明: $Ax=0 \Rightarrow A^TAx=A^T(Ax)=0$

$A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \Rightarrow (Ax)^T(Ax)=0 \Rightarrow Ax=0$ □

4. 判断下列方程组是否有解, 若有解, 求出方程组的解.

(1) $\begin{cases} 2x+y-2z=1 \\ 3x+y+5z=9 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ 3x+3y+5z=14 \\ x-y-9z=10 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x-y+2z=-4 \\ 3x-2y+5z=-5 \\ x-y+3z=-1 \end{cases}$

解：(1) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 3 & 1 & 5 & \vdots & 9 \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & 5 & \vdots & 9 \\ 2 & 1 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -6 \\ 0 & -1 & -8 & \vdots & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & \vdots & -4 \\ 0 & -1 & -8 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 12 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{12}r_3]{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 8 & \vdots & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-8r_3]{r_1+5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩 = 增广矩阵的秩（= 未知数个数），故原方程组有（唯一）解

解为 $x=1, y=1, z=1$.

(2) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & 5 & \vdots & 14 \\ 1 & -1 & -9 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 & \vdots & 10 \\ 3 & 3 & 5 & \vdots & 14 \\ 2 & 1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 & \vdots & 10 \\ 0 & 6 & 32 & \vdots & -16 \\ 0 & 3 & 16 & \vdots & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 & \vdots & 10 \\ 0 & 6 & 32 & \vdots & -16 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩 ≠ 增广矩阵的秩，故原方程组无解.

(3) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ 3 & -2 & 5 & \vdots & -5 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & -1 \\ 3 & -2 & 5 & \vdots & -5 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩 = 增广矩阵的秩（< 未知数个数），故原方程组有（无穷多）解.

解为 $\begin{cases} x_1 = t-3 \\ x_2 = 4t-2 \\ x_3 = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. □

(4) $\begin{cases} 3x+y-4z=1 \\ 7x-2y+9z=12 \\ 5x-5y+7z=2 \\ 3x+3y-5z=4 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 7x+3y+6z=4 \\ -5x+3y+8z=10 \\ x+y+6z=4 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x+2y-z=5 \\ -2x+3y-8z=1 \\ 2x+y=3. \end{cases}$

解：(4) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & \vdots & 1 \\ 7 & -2 & 9 & \vdots & 12 \\ 5 & -5 & 7 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 & \vdots & 12 \\ 3 & 1 & -4 & \vdots & 1 \\ 5 & -5 & 7 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 17 & \vdots & 10 \\ 3 & 1 & -4 & \vdots & 1 \\ 5 & -5 & 7 & \vdots & 2 \\ 3 & 3 & -5 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-5r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 17 & \vdots & 10 \\ 0 & 13 & -55 & \vdots & -29 \\ 0 & 15 & -78 & \vdots & -48 \\ 0 & 15 & -56 & \vdots & -26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{r_2-r_4}\begin{pmatrix}1&-4&17&10\\0&-2&21&17\\0&0&-22&-22\\0&15&-56&-26\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{56}{22}r_3]{r_2+\frac{21}{22}r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&17&10\\0&-2&0&-4\\0&0&-22&-22\\0&15&0&30\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{22}r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-4&17&10\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&15&0&30\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-15r_2]{r_1+4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&17&18\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-17r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

系数矩阵的秩=增广矩阵的秩=未知数个数 $(n=3)$

故原方程组有唯一解.

有唯一解 $x=1, y=2, z=1$.

(5) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&-6\\7&3&6&4\\-5&3&8&10\\1&1&6&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+5r_1\\r_4-r_1}]{r_2-7r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&-6\\0&-11&27&46\\0&13&-7&-20\\0&-1&9&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&-6\\0&-1&9&10\\0&2&20&26\\0&-11&27&46\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_4-11r_2}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&15&14\\0&-1&9&10\\0&0&38&46\\0&0&-72&-64\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\frac{36}{19}r_3}\begin{pmatrix}1&0&15&14\\0&-1&9&10\\0&0&38&46\\0&0&0&\frac{440}{19}\end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩≠增广矩阵的秩

故原方程组无解.

(6) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&3\\3&2&-1&5\\-2&3&-8&1\\2&1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3+2r_1\\r_4-2r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&3\\0&-4&8&-4\\0&7&-14&7\\0&-3&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&3\\0&1&-2&1\\0&7&-14&7\\0&-3&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-7r_2\\r_4+3r_2}]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

系数矩阵的秩=增广矩阵的秩<未知数个数 故原方程组有无穷多解.

解为 $\begin{cases}x=-t+1\\y=2t+1\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$

(7) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+7x_4+2x_5=13\\3x_1+7x_2-x_3+2x_4+x_5=20\\2x_1-17x_2+6x_3+33x_4+9x_5=39\end{cases}$

(8) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+x_4+x_5=-5\\-x_1+3x_2+4x_3-2x_4+2x_5=1\\4x_1-8x_2-10x_3+5x_4-2x_5=-4\end{cases}$

解: (7) 对增广矩阵做行初等变换得

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&7&2&13\\3&7&-1&2&1&20\\2&-17&6&33&9&39\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&7&2&13\\0&13&-4&-19&-5&-19\\0&-13&4&19&5&13\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&7&2&13\\0&13&-4&-19&-5&-19\\0&0&0&0&0&32\end{array}\right)$$

系数矩阵的秩≠增广矩阵的秩 故原方程组无解.

(8) 对增广矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 & | & -5 \\ -1 & 3 & 4 & -2 & 2 & | & 1 \\ 4 & -9 & -10 & 5 & -2 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -2 & 2 & | & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 0 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & 3 & | & -3 \\ 0 & -3 & -12 & 3 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 1 & | & -4 \\ 0 & 3 & 9 & -3 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -4 & | & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩 = 增广矩阵的秩 < 未知数个数 故方程组有无穷多解. (5)

解为
$$\begin{cases} x_1 = -9t_1 + 4t_2 + 1 \\ x_2 = -5t_1 + 2t_2 + 2 \\ x_3 = 2t_1 - t_2 - 1 \\ x_4 = t_1 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$$

5. 求下列带参方程组的解(何时有解、无解、有无穷多解).

(1) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + \lambda y + 2z = 13 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 11x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -6 \end{cases}$

解: (1) 对增广矩阵 $B=(A,b)$ 做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 3 & \lambda & 2 & | & 13 \\ 2 & -2 & 3 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 2 & -2 & 3 & | & 7 \\ 3 & \lambda & 2 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & -3 & 3 & | & 3 \\ 0 & \lambda-\frac{3}{2} & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & \lambda-\frac{3}{2} & 2 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(\lambda-\frac{3}{2})r_2]{r_1-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} & | & \lambda+\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda + \frac{11}{2} = 5 \neq 0$

若 $\lambda + \frac{1}{2} = 0$ 即 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时, 则 $r(A) = 2 < r(B) = 3$ 故方程组无解.

若 $\lambda + \frac{1}{2} \neq 0$ 即 $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, 则 $r(A) = r(B) = 3$, 故方程组有唯一解

$$\begin{cases} x = \frac{4\lambda-3}{2\lambda+1} \\ y = \frac{10}{2\lambda+1} \\ z = \frac{2\lambda+11}{2\lambda+1} \end{cases}$$

$\left[\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2\lambda+11}{2\lambda+1} = \frac{5(2\lambda+1)-(2\lambda+11)}{2(2\lambda+1)} = \frac{8\lambda-6}{2(2\lambda+1)} \right]$

(2) 对增广矩阵 $B=(A,b)$ 做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -11 & \vdots & a \\ 2 & 3 & 3 & b & \vdots & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -8 & \vdots & a-3 \\ 0 & -1 & 1 & b+2 & \vdots & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+4r_2 \\ r_4+r_2}]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -9 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & \vdots & a-3 \\ 0 & 0 & 2 & b+6 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -9 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \vdots & \frac{a-3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & b+6 & \vdots & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-r_3 \\ r_4-2r_3}]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & \vdots & \frac{a-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{a-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \vdots & \frac{a-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & \vdots & -a-5 \end{pmatrix}$$

当 $\begin{cases} b-2=0 \\ -a-5=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=2 \\ a=-5 \end{cases}$ 时，$r(A)=r(B)=3<4$，Ax方程组有无穷多解 $\begin{cases} x_1=5t-3 \\ x_2=4 \\ x_3=-4t-4 \\ x_4=t \end{cases}$

当 $\begin{cases} b-2=0 \\ -a-5\neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=2 \\ a\neq -5 \end{cases}$ 时，$r(A)=3<r(B)=4$ Ax方程组无解.

$r(A)=r(B)=4$

当 $b-2\neq 0$ 即 $b\neq 2$ 时，Ax方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1=\frac{a-1}{2}-5\frac{a+5}{b-2} \\ x_2=-\frac{a-3}{2} \\ x_3=\frac{a+3}{2}+4\frac{a+5}{b-2} \\ x_4=-\frac{a+5}{b-2} \end{cases}$ □

6. 证明线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=b_1 \\ x_2-2x_3+x_4=b_2 \\ \cdots \\ x_{n-2}-2x_{n-1}+x_n=b_{n-2} \\ x_1+x_{n-1}-2x_n=b_{n-1} \\ -2x_1+x_2+x_n=b_n \end{cases}$ 有解的充要条件为 $\sum_{i=1}^{n} b_i=0$

证明：对增广矩阵 $B=(A\ b)$ 做初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 & b_{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & b_{n-1} \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_n+\sum_{i=1}^{n-1} r_i} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -2 & 1 & b_{n-2} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=0}^{n} b_i \end{pmatrix}$$

~~记右侧矩阵的第i行为 α_i~~

~~设 $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i=0$ 则 $(\lambda_1+\lambda_{n-1}, -2\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1$~~

由数学归纳法可证 $\begin{vmatrix} -2 & +1 & & \\ +1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & +1 \\ & & +1 & -2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{n-3} n \neq 0$

这是右侧矩阵第2至n列与第1至n-1行构成的子式

因此 $r(A)=n-1$ 而 $r(B)=n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$.

故Ax方程组有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(B) \Leftrightarrow r(B)=n-1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i=0$.

□

45

7. 求下列齐次方程组的基础解系和通解.

(1) $\begin{cases}2x+y+7z=0\\3x+3y+5z=0\\7x+2y+30z=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+4x_3-x_4=0\\x_1-2x_2+7x_3-3x_4=0\end{cases}$ (3) $\begin{cases}3x-y+5z=0\\2x+y+5z=0\\x+3y+5z=0\\x+2y+4z=0\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3+2x_4=0\\-x_1+2x_2+x_3+5x_4=0\\3x_1-6x_2+3x_3+9x_4=0\\2x_1-4x_2+2x_3+6x_4=0\end{cases}$

解：(1) 对~~增广矩阵~~系数矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix}2&1&7\\3&3&5\\7&2&30\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{7}{2}r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&7\\0&\frac{3}{2}&-\frac{11}{2}\\0&-\frac{3}{2}&\frac{11}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{2}{3}r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{7}{2}\\0&1&-\frac{11}{3}\\0&-\frac{3}{2}&\frac{11}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-\frac{1}{2}r_2]{r_3+\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{16}{3}\\0&1&-\frac{11}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

一个基础解系为 $(-\frac{16}{3},\frac{11}{3},1)^T$　通解为 $t(-\frac{16}{3},\frac{11}{3},1)^T$，$t\in\mathbb{R}$.

(2) 对系数矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&1&4&-1\\1&-2&7&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-3&6&-3\\0&-4&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-2&1\\0&-4&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 列 -1

$(-3,2,1,0)^T$，$(1,-1,0,1)^T$ 为一个基础解系，通解为 $t_1(-3,2,1,0)^T+t_2(1,-1,0,1)^T$，$t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

(3) 对系数矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix}3&-1&5\\2&1&5\\1&3&5\\1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&1&5\\1&3&5\\3&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-3&-3\\0&1&1\\0&-7&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+3r_3\\r_4+7r_3}]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(-2,-1,1)^T$ 为一个基础解系，通解为 $t(-2,-1,1)^T$，$t\in\mathbb{R}$

(4) 对系数矩阵做初等行变换得

$$\begin{pmatrix}2&-4&1&2\\-1&2&1&5\\3&-6&3&9\\2&-4&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_1\\r_1\leftrightarrow r_2}]{r_3-r_4}\begin{pmatrix}-1&2&1&5\\2&-4&1&2\\1&-2&2&7\\0&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}-1&2&1&5\\0&0&3&12\\0&0&3&12\\0&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}r_2\\r_4-r_2\\r_1+r_2}]{\substack{-r_1\\r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-1\\0&0&1&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$(1,-4,0,1)^T$，$(2,1,0,0)^T$ 是一个基础解系，通解为 $t_1(1,-4,0,1)^T+t_2(2,1,0,0)^T$，$t_1,t_2\in\mathbb{R}$ ∎

8. 设 $\begin{vmatrix}a_{01}&\cdots&a_{0n}&b_0\\a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{vmatrix}\neq 0$，证明 $\begin{cases}a_{01}x_1+\cdots+a_{0n}x_n=b_0\\a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\\cdots\\a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ 无解.

证明：设系数矩阵为A，增广矩阵为B.

由题设条件，$r(A)\le\min\{n,n+1\}=n$，而 $r(B)=n+1$ 因此方程组无解 ∎

9. 证明：方程组 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 与方程组 $Ax=0$ 是同解方程组的充要条件是 $A^Ty=b$ 有解，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

证明：因为 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 的解必为 $Ax=0$ 的解

所以 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 与 $Ax=0$ 同解

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的基础解系是 $\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}x=0$ 的基础解系

$\Leftrightarrow$ $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\b^T\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $r(A^T)=r(A^T,b)$

$\Leftrightarrow$ $A^Ty=b$ 有解 □

10. 已知 $Ax=0$ 的一个基础解系是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，求 $(A,A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 的一个基础解系，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

解：由 $Ax=0$ 的基础解系中的向量个数可知 $r(A)=n-r$

因此 $r(A,A)=r(A)=n-r$ 所以 $(A,A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 的任一基础解系的向量个数为 $2n-(n-r)=n+r$.

断言：$\begin{pmatrix}e_1\\-e_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}e_n\\-e_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\alpha_r\end{pmatrix}$ 是 $(A,A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 的一个基础解系.

首先，$(A,A)\begin{pmatrix}e_i\\-e_i\end{pmatrix}=Ae_i+A(-e_i)=0 \quad \forall\, 1\le i\le n$

$(A,A)\begin{pmatrix}0\\\alpha_j\end{pmatrix}=A\cdot 0+A\alpha_j=0 \quad \forall\, 1\le j\le r$

因此上述 $n+r$ 个向量都是 $(A,A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 的解.

其次，设 $\lambda_1\begin{pmatrix}e_1\\-e_1\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}e_n\\-e_n\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}0\\\alpha_1\end{pmatrix}+\cdots+\mu_r\begin{pmatrix}0\\\alpha_r\end{pmatrix}=0$

则 $\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\\-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i+\sum_{j=1}^r\mu_j\alpha_j\end{pmatrix}=0$ 即 $\begin{cases}\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i=0\\\sum_{j=1}^r\mu_j\alpha_j=0\end{cases}$

因为 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 均为线性无关组，所以 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0=\mu_1=\cdots=\mu_r$

所以 $\begin{pmatrix}e_1\\-e_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}e_n\\-e_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\alpha_r\end{pmatrix}$ 线性无关.

故断言成立. □

11. 已知齐次方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有 $A_{11}\neq0$ 且 $|A|=0$.

证明 $(A_{11},\cdots,A_{1n})^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，其中 $A_{11},\cdots,A_{1n}$ 是行列式 $|A|$ 第1行元素的代数余子式.

证明：$A_{11}\neq 0 \Rightarrow r(A^*)>0$，$|A|=0 \Rightarrow r(A)<n$ $\Big\}\overset{例题5.7}{\Rightarrow} r(A)=n-1$ 因此 $Ax=0$ 的基础解系由1个向量组成

而由 $AA^*=|A|E=0$ 可知 $A\begin{pmatrix}A_{11}\\ \vdots\\ A_{1n}\end{pmatrix}=0$ 故 $\begin{pmatrix}A_{11}\\ \vdots\\ A_{1n}\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的解

又 $A_{11}\neq 0$ 所以此解为非0解，因此 $\begin{pmatrix}A_{11}\\ \vdots\\ A_{1n}\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 □

12、设 $A\in\mathbb{R}^{r\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{(n-r)\times n}$ 都是行满秩矩阵，且有关系 $AB^T=0$。证明：B^T 的列构成 $Ax=0$ 的一个基础解系，A^T 的列构成 $By=0$ 的一个基础解系。

证明：只需证第一个结论。

记 B^T 的各列为 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$

则由 $AB^T=0$ 知 $A(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})=0$ 即 $A\beta_1=0,\cdots,A\beta_{n-r}=0$

所以 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的解

又 B 为行满秩，即 B^T 列满秩，所以 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 线性无关

而且 $r(A)=r$ 所以 $Ax=0$ 的任一基础解系中向量个数为 $n-r$

所以 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 □

> $n-r$ 个线性无关的解组成基础解系

13、证明：若 $Ax=0$ 的解一定是 $Bx=0$ 的解，则 B 的行向量都能表示成 A 的行向量的线性组合，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{p\times n}$

证明：由题意，$Ax=0$ 与 $\begin{pmatrix}Ax\\ Bx\end{pmatrix}=0$ 即 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}x=0$ 同解。

因此 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$。

特别地，A 的行向量的极大无关组是 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ 的行向量组的极大无关组

所以 B 的行向量可以由 A 的行向量的极大无关组线性表示 □

14、证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^n$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$。

证明：首先易见 β_1,β_2,β_3 是 $Ax=0$ 的解。

其次，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=4\neq 0$

故 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 可逆，因此 β_1,β_2,β_3 也线性无关（由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可知） 「可直接求逆」

又 $\#\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=3=\#\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

所以 β_1,β_2,β_3 也是一个基础解系. □

15. 设线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\\a_{n-1,1}x_1+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}$ 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}$ 行满秩，

M_i 为 A 中划去第 i 列后剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 阶方阵的行列式.

证明：$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n+1}M_n)^T$ 为方程组的基础解系.

证明：因 $r(A)=n-1$，故方程组的基础解系只有 $1=n-(n-1)$ 个向量.

因此只需证 $A\begin{pmatrix}M_1\\-M_2\\\vdots\\(-1)^{n+1}M_n\end{pmatrix}=0$，且 $\exists$ 某 $1\le i\le n$ s.t. $M_i\ne0$ 即可.

因 $r(A)=n-1$，故 A 有 $n-1$ 阶非 0 子式. 而 A 的所有 $n-1$ 阶非 0 子式即为 $M_1,\cdots,M_n$

所以 $\exists\ i$ s.t. $M_i\ne0$.

~~令 $B=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}_{n\times n}$，则 $B^*=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\M_1&-M_2&\cdots&(-1)^{n+1}M_n\end{pmatrix}$~~

令 $B=\begin{pmatrix}0\\A\end{pmatrix}_{n\times n}$ 则 ~~$B^*=\begin{pmatrix}M_1&-M_2&\cdots&(-1)^{n+1}M_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$~~ $B^*=\begin{pmatrix}M_1&0&\cdots&0\\-M_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(-1)^{n+1}M_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}$

~~因 $r(B)=r(A)<n$，所以~~ $=\begin{pmatrix}M_1&\\-M_2&\\\vdots&0\\(-1)^{n+1}M_n&\end{pmatrix}_{n\times n}$

于是 $BB^*=|B|E=0$

即 $\begin{pmatrix}0&0\\A\begin{pmatrix}M_1\\-M_2\\\vdots\\(-1)^{n+1}M_n\end{pmatrix}&0\end{pmatrix}=0$ 所以 $A\begin{pmatrix}M_1\\-M_2\\\vdots\\(-1)^{n+1}M_n\end{pmatrix}=0$ □

16. 设 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1=(0,0,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,0,-1)^T$，$Bx=0$ 的一个基础解系为 $\beta_1=(1,-1,1,1)^T$，$\beta_2=(2,1,1,0)^T$，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times4}$，$B\in\mathbb{R}^{p\times4}$ 求 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的一个基础解系.

解：设 γ 是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的解，则 γ 是 $Ax=0$ 的解，且是 $Bx=0$ 的解.

因此 $\exists\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ s.t. $\gamma=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2$

因此有 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\-\mu_1\\-\mu_2\end{pmatrix}=0$. 用高斯消去法解此线性方程组：

$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&2&-1&1\\1&0&1&1\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&-1&1\\0&2&-1&1\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&2&-1&1\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&-3&-3\\\cdots\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_4]{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\\cdots\end{pmatrix}$

肆拾玖

因此 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-t$, $\mu_1=t$, $\mu_2=-t$, $t\in R$

即 $\gamma=t(-\alpha_2)=t(\beta_1-\beta_2)$

因此 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 的一个基础解系是 $\beta_1-\beta_2(=-\alpha_2)$. □

17. 设方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-2x_1+x_2+x_4=0\end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+ax_3+bx_4=0\\x_1-ax_2+bx_3-x_4=0\end{cases}$ 同解，求a, b的值.

解：由13题结论知 ~~向量组 $(1,-1,1,0)$, $(-2,1,0,1)$ 与向量组 $(2,-1,a,b)$, $(1,-a,b,-1)$ 等价~~

则矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&-a&b&-1\end{pmatrix}$ 行等价

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&-a&b&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\2&-1&a&b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\0&2a-1&a-2b&b+2\end{pmatrix}$$

法二：

~~因此 $(1,0,-1,-1)$, $(0,1,-2,-1)$ 与 $(1,-a,b,-1)$, $(0,2a-1,a-2b,b+2)$ 等价~~

因此 $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\0&2a-1&a-2b&b+2\end{pmatrix}$ 行等价

即∃可逆阵 $\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}\end{pmatrix}$ s.t. $\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\0&2a-1&a-2b&b+2\end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&-\lambda_{11}-2\lambda_{12}&-\lambda_{11}-\lambda_{12}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}&-\lambda_{21}-2\lambda_{22}&-\lambda_{21}-\lambda_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a&b&-1\\0&2a-1&a-2b&b+2\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases}\lambda_{11}=1\ ①\quad \lambda_{12}=-a\ ②\quad -\lambda_{11}-2\lambda_{12}=b\ ③\quad -\lambda_{11}-\lambda_{12}=-1\ ④\\ \lambda_{21}=0\ ⑤\quad \lambda_{22}=2a-1\ ⑥\quad -\lambda_{21}-2\lambda_{22}=a-2b\ ⑦\quad -\lambda_{21}-\lambda_{22}=b+2\ ⑧\end{cases}$

$\left.\begin{matrix}①:\lambda_{11}=1\\④\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_{12}=0\\②\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=0\\⑥\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_{22}=-1\\⑤\\⑦\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a-2b=2\\a=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=-1$

所以 $a=0$, $b=-1$. □

法三：利用 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)=r(B)$ (13题)

18. 求下列非齐次方程组的通解：

(1) $\begin{cases}3x+2y+z=-3\\2x+3y+8z=3\\4x+3y+4z=-3\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x_1+x_2+7x_3+3x_4=5\\5x_1+6x_2+3x_3-6x_4=26\\x_1-x_2+2x_3+3x_4=1\end{cases}$

解.(1) 对增广矩阵做初等行变换

任拾

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & \vdots & -3 \\ 2 & 3 & 8 & \vdots & 3 \\ 4 & 3 & 4 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & \vdots & -6 \\ 2 & 3 & 8 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & \vdots & -6 \\ 0 & 5 & 20 & \vdots & 15 \\ 0 & 2 & 8 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & \vdots & -6 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 8 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

因此原方程组一个特解为 $(-3,3,0)^T$

对应齐次线性方程组的一个基础解系为 $(2,-4,1)^T$

因此原方程组通解为 $(-3,3,0)^T+t(2,-4,1)^T \quad t\in\mathbb{R}$.

(2) 对增广矩阵做初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 & \vdots & 5 \\ 5 & 16 & 31 & -6 & \vdots & 26 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & \vdots & 5 \\ 5 & 16 & 31 & -6 & \vdots & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 21 & 21 & -21 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2,\ r_3-21r_2]{\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组一个特解为 $(2,1,0,0)^T$

对应齐次方程组的一个基础解系为 $(-3,-1,1,0)^T$，$(-2,1,0,1)^T$

因此原方程组通解为 $(2,1,0,0)^T+t_1(-3,-1,1,0)^T+t_2(-2,1,0,1)^T$，$t_1,t_2\in\mathbb{R}$ □

19. 将向量 β 表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，其中

$$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}\lambda\\-1\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\\lambda\\4\end{pmatrix}.$$

解：设 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$ 则 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \lambda & 2\\1 & -1 & \lambda\\-5 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$.

对增广矩阵做初等行变换

$$B=\begin{pmatrix} -1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & \lambda & \vdots & 2 \\ -5 & 5 & 4 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 & \vdots & -1 \\ 1 & -1 & \lambda & \vdots & 2 \\ -1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 1 & -1 & \lambda & \vdots & 2 \\ -1 & \lambda & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{4}{5} & \vdots & \frac{9}{5} \\ 0 & \lambda-1 & \frac{6}{5} & \vdots & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & \vdots & +\frac{1}{5} \\ 0 & \lambda-1 & \frac{6}{5} & \vdots & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{4}{5} & \vdots & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

若 $\lambda+\frac{4}{5}=0$，即 $\lambda=-\frac{4}{5}$，则 系数矩阵秩 $=2<3=$ 增广矩阵秩，此时 β 不能表示成 α_1,α_2 的线性组合

若 $\lambda-1=0$ 即 $\lambda=1$ 则 $B\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & +\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} & \vdots & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{9}{5}r_2]{r_1+\frac{4}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

所以 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\t\\1\end{pmatrix}$，$t\in\mathbb{R}$

故 $\beta=(t+1)\alpha_1+t\alpha_2+\alpha_3$，$t\in\mathbb{R}$.

伍拾壹

$\frac{1}{5}+\frac{6}{5\lambda+4}+\frac{4}{5}\frac{9}{5\lambda+4}=\frac{(5\lambda+4)+30+36}{5(5\lambda+4)}$

若 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$，$\lambda\neq1$，则 $\begin{cases}\lambda_1=\frac{\lambda+14}{5\lambda+4}\\ \lambda_2=\frac{6}{5\lambda+4}\\ \lambda_3=\frac{9}{5\lambda+4}\end{cases}$

$\frac{\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\times\frac{9}{5\lambda+4}}{\lambda-1}=\frac{\frac{6\times(5\lambda+4-9)}{5\times(5\lambda+4)}}{\lambda-1}$

所以 $\beta=\frac{\lambda+14}{5\lambda+4}\alpha_1+\frac{6}{5\lambda+4}\alpha_2+\frac{9}{5\lambda+4}\alpha_3$ □

20. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}^n$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\eta\in\mathbb{R}^n$ 是 $Ax=b$，$b\neq0$ 的一个特解。

又设 $\beta_0=\eta$，$\beta_1=\eta+\alpha_1,\cdots,\beta_r=\eta+\alpha_r$。

证明：(1) $\beta_0,\cdots,\beta_r$ 线性无关

(2) $Ax=b$ 的任意解 β 都能表示成 $\beta_0,\cdots,\beta_r$ 的线性组合 $\beta=k_0\beta_0+k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r$ 其中 $\sum_{i=0}^{r}k_i=1$

证明：(1) 设 $\lambda_0\beta_0+\cdots+\lambda_r\beta_r=0$

则 $(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)\beta+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$

两边左乘A得 $(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)A\beta+\lambda_1A\alpha_1+\cdots+\lambda_rA\alpha_r=0$ 即 $(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)b=0$，而 $b\neq0$ 所以 $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=0$

因此 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$ 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$，所以 $\lambda_0=-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=0$

所以 $\beta_0,\cdots,\beta_r$ 线性无关

(2) 设 β 是 $Ax=b$ 的任一解，

则 $\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{R}$ s.t. $\beta=\eta+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r=(1-\lambda_1-\cdots-\lambda_r)\eta+\lambda_1(\eta+\alpha_1)+\cdots+\lambda_r(\eta+\alpha_r)$

令 $k_0=1-\lambda_1-\cdots-\lambda_r$，$k_1=\lambda_1,\cdots,k_r=\lambda_r$ 则 $\sum_{i=0}^{r}k_i=0$

且 $\beta=k_0\beta_0+k_1\beta_1+\cdots+k_r\beta_r$ □

习题四

1. 求下列矩阵A的特征值与特征向量

(1) $\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-2&1&-2\\-14&8&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}4&-3&6\\0&1&0\\-3&3&-5\end{pmatrix}$ ✓(3) $\begin{pmatrix}6&-1&5\\-4&3&-5\\-7&-3&-2\end{pmatrix}$ ✓(4) $\begin{pmatrix}7&-4&-4\\3&-1&-1\\5&-4&-2\end{pmatrix}$

解：(1) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&2\\2&\lambda-1&2\\14&-8&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\-8&\lambda-3\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2&2\\14&\lambda-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&\lambda-1\\14&-8\end{vmatrix}$

$=(\lambda+2)(\lambda^2-4\lambda+19)+(2\lambda-34)+2(-14\lambda-2)$

$=\lambda^3-2\lambda^2-15\lambda=\lambda(\lambda+3)(\lambda-5)$

得 A 的三个特征值为 $\lambda=0,-3,5$

对 $\lambda=0$，解齐次方程组 $-Ax=0$ 即 $Ax=0$，由

$$\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-2&1&-2\\-14&8&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-2&1&-2\\0&0&0\\0&1&17\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}-2&0&-19\\0&0&0\\0&1&17\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&\frac{19}{2}\\0&1&17\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(-\frac{19}{2},-17,1)^T$.

故属于特征值 0 的全部特征向量为 $\lambda_1\alpha_1,\ \lambda_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=-3$，解齐次方程组 $(-3E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1&-1&2\\2&-4&2\\14&-8&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+14r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&-6&6\\0&-22&22\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{6}r_2]{-r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&-22&22\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+22r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_2=(1,1,1)^T$

故属于特征值 -3 的全部特征向量为 $\lambda_2\alpha_2,\ \lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=5$，解齐次方程组 $(5E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}7&-1&2\\2&4&2\\14&-8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_1]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\7&-1&2\\14&-8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-14r_1]{r_2-7r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-15&-5\\0&-36&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{15}r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&-36&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+36r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_3=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)^T$

故属于特征值 5 的全部特征向量为 $\lambda_3\alpha_3,\ \lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(2) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&3&-6\\0&\lambda-1&0\\3&-3&\lambda+5\end{vmatrix}\overset{\text{按第2行展开}}{=}(\lambda-1)\times\begin{vmatrix}\lambda-4&-6\\3&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

得 A 的两个特征值为 $\lambda=1$（二重），$\lambda=-2$

对 $\lambda=1$，解齐次方程组 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-3&3&-6\\0&0&0\\3&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}-3&3&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$

伍拾叁

故属于特征值 1 的全部特征向量为 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 不全为 0

对 $\lambda=-2$，解 $(-2E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-6&3&-6\\0&-3&0\\3&-3&+3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}3&-3&3\\0&-3&0\\-6&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{3}r_2]{\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-6&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+6r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_3=(-1,0,1)^T$

故属于特征值 -2 的全部特征向量为 $\lambda_3\alpha_3$，$\lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(3) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&1&-5\\4&\lambda-3&5\\7&3&\lambda+2\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\4&\lambda-3&5\\7&3&\lambda+2\end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\4&\lambda-7&5\\7&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-7&5\\-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6)$

$=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

得 A 的两个特征值 $\lambda=2$（二重），$\lambda=3$.

对 $\lambda=2$，解方程组 $(2E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-4&1&-5\\4&-1&5\\7&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_1}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&\frac{5}{4}\\4&-1&5\\7&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&0\\0&\frac{19}{4}&-\frac{19}{4}\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{4}{19}r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$

故属于特征值 2 的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1$，$\lambda_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=3$，解方程组 $(3E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-3&1&-5\\4&0&5\\7&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\4&0&5\\7&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-7r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-4&5\\0&-4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-\frac{5}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{5}{4}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_2=(-\frac{5}{4},\frac{5}{4},1)^T$

(4) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7&4&4\\-3&\lambda+1&1\\-5&4&\lambda+2\end{vmatrix}\overset{c_2-c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-7&0&4\\-3&\lambda&1\\-5&-\lambda+2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}\lambda&1\\-\lambda+2&\lambda+2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-3&\lambda\\-5&-\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda^2+3\lambda-2)+4(8\lambda-6)$

$=\lambda^3-4\lambda^2+9\lambda-10=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+5)$

$=(\lambda-2)(\lambda-(1+2\sqrt{-1}))(\lambda-(1-2\sqrt{-1}))$

得 A 的三个特征值 $\lambda=2$，$1+2\sqrt{-1}$，$1-2\sqrt{-1}$.

对 $\lambda=2$，解方程组 $(2E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-5&4&4\\-3&3&1\\-5&4&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}-5&4&4\\-3&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-3&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&-3&7\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_2]{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{8}{3}\\0&1&-\frac{7}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一基础解系 $\alpha_1=(\frac{8}{3},\frac{7}{3},1)^T$

故属于特征值2的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1$，$\lambda_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=1+2\sqrt{-1}$，解 $((1+2\sqrt{-1})E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-6+2\sqrt{-1}&4&4\\-3&2+2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3+2\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}2\sqrt{-1}&-4\sqrt{-1}&2\\-3&2+2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3+2\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2\sqrt{-1}}r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{-1}\\-3&2+2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3+2\sqrt{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+5r_1]{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}1&-2-2\sqrt{-1}&-\sqrt{-1}\\0&-6-4\sqrt{-1}&1-3\sqrt{-1}\\0&-6-10\sqrt{-1}&3-3\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+5r_1]{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{-1}\\0&-4+2\sqrt{-1}&1-3\sqrt{-1}\\0&-6&3-3\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{-4+2\sqrt{-1}}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{-1}\\0&1&\frac{-1+\sqrt{-1}}{2}\\0&-6&3-3\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+6r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{-1+\sqrt{-1}}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一基础解系 $\alpha_2=(1,\frac{1-\sqrt{-1}}{2},1)^T$

故属于特征值 $1+2\sqrt{-1}$ 的所有特征向量为 $\lambda_2(1,\frac{1-\sqrt{-1}}{2},1)^T$，$\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

对 $\lambda=1-2\sqrt{-1}$，解 $((1-2\sqrt{-1})E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-6-2\sqrt{-1}&4&4\\-3&2-2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3-2\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}-2\sqrt{-1}&4\sqrt{-1}&2\\-3&2-2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3-2\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{-2\sqrt{-1}}r_1}\begin{pmatrix}1&-2&\sqrt{-1}\\-3&2-2\sqrt{-1}&1\\-5&4&3-2\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+5r_1]{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&\sqrt{-1}\\0&-4-2\sqrt{-1}&1+3\sqrt{-1}\\0&-6&3+3\sqrt{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-4-2\sqrt{-1}}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&\sqrt{-1}\\0&1&\frac{-1-\sqrt{-1}}{2}\\0&-6&3+3\sqrt{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{-1-\sqrt{-1}}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一基础解系 $\alpha_3=(1,\frac{1+\sqrt{-1}}{2},1)^T$

故属于特征值 $1-2\sqrt{-1}$ 的所有特征向量为 $\lambda_3\alpha_3$，$\lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. □

2. 求下列n阶矩阵A的特征值和特征向量 $(n\geq 2)$

(1) $\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&1\\1&\cdots&\cdots&1&0\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\\vdots&&1&0\\&\iddots&&\vdots\\0&&&\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$

伍拾伍

解：(1) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & \lambda\end{vmatrix}_{n\times n}\xrightarrow[2\le i\le n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1-\lambda & \lambda+1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1+\sum_{i=2}^{n}c_i}\begin{vmatrix}\lambda-(n-1) & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda+1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$

参考例1.2.4

$=(\lambda+1)^{n-1}(\lambda-(n-1))$

得 A 的特征值为 $\lambda=-1$ ($n-1$ 重)，$\lambda=n-1$.

对 $\lambda=-1$，解方程组 $(-E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[2\le i\le n]{r_i-r_1}\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$, $\alpha_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^T$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)^T$

故属于 -1 的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$ 不全为0.

对 $\lambda=n-1$，解方程组 $((n-1)E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & & n-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_{[\frac{n+1}{2}]}\leftrightarrow r_{[\frac{n+1}{2}]+1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_n\\ r_2\leftrightarrow r_{n-1}\\ \cdots}}\begin{pmatrix}-1 & \cdots & -1 & -1 & n-1\\ -1 & \cdots & -1 & n-1 & -1\\ \vdots & & ⋰ & ⋰ & \vdots\\ -1 & ⋰ & & & \vdots\\ n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\sum_{i=2}^{n} r_i}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & n-1 & & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & n-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1-r_2\\ r_2-r_3\\ \cdots\\ r_{n-1}-r_n}}\begin{pmatrix}n & -n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n & -n & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & n & -n\\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & n-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1-r_n\\ r_2-r_n\\ \cdots\\ r_{n-1}-r_n}}\begin{pmatrix}n & 0 & \cdots & 0 & -n\\ 0 & n & \ddots & 0 & -n\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n & -n\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_n+\sum_{1\le i\le n-1} r_i]{\frac{1}{n}r_i,\ 1\le i\le n-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -1\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系为 $\alpha_n=(1,1,\cdots,1)^T$

故属于 $n-1$ 的所有特征向量为 $\lambda_n\alpha_n$，$\lambda_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(2) 先设 n 为偶数.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & & & & & -1\\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & \lambda & -1 & & \\ & & -1 & \lambda & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ -1 & & & & & \lambda\end{vmatrix}_{n\times n}\xrightarrow[r_{\frac{n}{2}}+\lambda r_{\frac{n}{2}+1}]{\substack{r_1+\lambda r_n\\ r_2+\lambda r_{n-1}\\ \cdots}}\begin{vmatrix} & & & & & \lambda^2-1\\ & & & & ⋰ & \\ & & 0 & \lambda^2-1 & & \\ & & -1 & \lambda & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ -1 & & & & & \lambda\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\times\underbrace{(-1)\times\cdots\times(-1)}_{\frac{n}{2}个}\times\underbrace{(\lambda^2-1)\times\cdots\times(\lambda^2-1)}_{\frac{n}{2}个}$

$=(\lambda-1)^{\frac{n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n}{2}}$

得 A 的特征~~向量~~值为 $\lambda=1$ ($\frac{n}{2}$ 重)，$\lambda=-1$ ($\frac{n}{2}$ 重)

对 $\lambda=1$，解方程组 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&-1&&\\&&-1&1&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_{\frac{n}{2}+1}+r_{\frac{n}{2}}]{r_n+r_1,\ \cdots}\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&-1&&\\&&0&0&&\\&\iddots&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,0,\cdots,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,\cdots,0,1,0)^T$，$\cdots$，$\alpha_{\frac{n}{2}}=(0,\cdots,0,1,1,0,\cdots,0)^T$（$\frac{n}{2}$位）

故属于特征值1的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{\frac{n}{2}}\alpha_{\frac{n}{2}}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_{\frac{n}{2}}\in R$ 不全为0.

对 $\lambda=-1$，解方程组 $(-E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&-1&-1&&\\&&-1&-1&&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_{\frac{n}{2}+1}-r_{\frac{n}{2}}\\-r_1\\ \vdots\\ -r_{\frac{n}{2}}}]{r_n-r_1,\ \cdots}\begin{pmatrix}1&&&&&1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&1&&\\&&0&0&&\\&\iddots&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_{\frac{n}{2}+1}=(-1,0,\cdots,0,1)^T$，$\alpha_{\frac{n}{2}+2}=(0,-1,0,\cdots,0,1,0)^T$，$\cdots$，$\alpha_n=(0,\cdots,0,-1,1,0,\cdots,0)^T$（$\frac{n}{2}$位）

故属于特征值−1的所有特征向量为 $\lambda_{\frac{n}{2}+1}\alpha_{\frac{n}{2}+1}+\cdots+\lambda_n\alpha_n$，其中 $\lambda_{\frac{n}{2}+1},\cdots,\lambda_n\in R$ 不全为0.

再设n为奇数

$$由\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&\lambda&&-1&\\&&&\lambda-1&&\\&&-1&&\lambda&\\&\iddots&&&&\ddots\\-1&&&&&\lambda\end{vmatrix}_{n\times n}\xlongequal[行展开]{按第\frac{n+1}{2}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&&&&-1\\&\ddots&&\iddots&\\&&\lambda\ \ -1&&\\&&-1\ \ \lambda&&\\&\iddots&&\ddots&\\-1&&&&\lambda\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=(\lambda-1)^{\frac{n+1}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}$$

得A的特征值为 $\lambda=1$（$\frac{n+1}{2}$重），及 -1（$\frac{n-1}{2}$重）

对 $\lambda=1$，解方程组 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&&-1&\\&&&0&&\\&&-1&&1&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_{\frac{n+3}{2}}+r_{\frac{n-1}{2}}]{r_n+r_1,\ \cdots}\begin{pmatrix}1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&&-1&\\&&&0&&\\&&0&&0&\\&\iddots&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,0,\cdots,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,0,\cdots,0,1,0)^T$，$\cdots$，$\alpha_{\frac{n-1}{2}}=(0,\cdots,0,1,0,1,0,\cdots,0)^T$（$\frac{n-1}{2}$位），$\alpha_{\frac{n+1}{2}}=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$（$\frac{n+1}{2}$位）

故所有属于特征值1的特征向量为 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{\frac{n+1}{2}}\alpha_{\frac{n+1}{2}}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{\frac{n+1}{2}}\in R$ 不全为0.

对 $\lambda=-1$，解方程组 $(-E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1&&&&&-1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&-1&&-1&\\&&&-2&&\\&&-1&&-1&\\&\iddots&&&\ddots&\\-1&&&&&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_{\frac{n+3}{2}}-r_{\frac{n-1}{2}}\\-r_1\\ \cdots\\ -r_{\frac{n-1}{2}},\ -\frac{1}{2}r_{\frac{n+1}{2}}}]{r_n-r_1,\ \cdots}\begin{pmatrix}1&&&&&1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&&1&\\&&&0&&\\&&0&&0&\\&\iddots&&&\ddots&\\0&&&&&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_{\frac{n+3}{2}}=(-1,0,\cdots,0,1)^T$，$\alpha_{\frac{n+5}{2}}=(0,-1,0,\cdots,0,1,0)^T$，$\cdots$，$\alpha_n=(0,\cdots,0,-1,0,1,0,\cdots,0)^T$（$\frac{n-1}{2}$位）

故所有属于特征值−1的特征向量为 $\lambda_{\frac{n+3}{2}}\alpha_{\frac{n+3}{2}}+\cdots+\lambda_n\alpha_n$，其中 $\lambda_{\frac{n+3}{2}},\cdots,\lambda_n\in R$ 不全为0. □

伍拾柒

3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 4 & -3 & -3a-1\\ -1 & 1 & a+3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 3 & 1\\ -4 & \lambda+3 & 3a+1\\ 1 & -1 & \lambda-a-3\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{=}-\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda-a-3\\ -4 & \lambda+3 & 3a+1\\ \lambda-4 & 3 & 1\end{vmatrix}\underset{r_3-(\lambda-4)r_1}{\overset{r_2+4r_1}{=}}-\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda-a-3\\ 0 & \lambda-1 & 4\lambda-a-11\\ 0 & \lambda-1 & 1-(\lambda-a-3)(\lambda-4)\end{vmatrix}$

$\overset{r_3-r_2}{=}-\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda-a-3\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-a-11\\ 0 & 0 & -\lambda^2+(a+3)\lambda-3a\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-a)$

得若 $a=1$，则特征值为 $\lambda=1$（二重），$\lambda=3$

若 $a=3$，则特征值为 $\lambda=1$，$\lambda=3$（二重）

若 $a\neq 1,3$，则特征值为 $\lambda=1,3,a$

注：求特征向量时对特征值1，3的所有可能的a可做统一处理。

若 $a=1$，对 $\lambda=1$，解方程组 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -4 & 4 & 4\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -4 & 4 & 4\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+3r_2\\ r_3+8r_2}]{-\frac{1}{8}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T$

故属于 $\lambda=1$ 的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1$，$\lambda_1\in R\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=3$，解方程组 $(3E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 4\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{6}r_2]{-r_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_2=(1,0,1)^T$

故属于 $\lambda=3$ 的所有特征向量为 $\lambda_2\alpha_2$，$\lambda_2\in R\setminus\{0\}$.

若 $a=3$，对 $\lambda=1$，解方程组 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & 1\\ -4 & 4 & 10\\ 1 & -1 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ -4 & 4 & 10\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & -14\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+5r_2\\ r_3+14r_2}]{-\frac{1}{10}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T$

故属于 $\lambda=1$ 的所有特征向量为 $\lambda_1\alpha_1$，$\lambda_1\in R\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=3$，解方程组 $(3E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 10\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & -6 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{6}r_2]{-r_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_2=(4,1,1)^T$

故属于 $\lambda=3$ 的所有特征向量为 $\lambda_2\alpha_2$，$\lambda_2\in R\setminus\{0\}$.

若 $a \neq 1, 3$，对 $\lambda=1$，解 $(E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-3&3&1\\-4&4&3a+1\\1&-1&-a-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-a-2\\-4&4&3a+1\\-3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-a-2\\0&0&-a-7\\0&0&-3a-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-a-2\\0&0&-a-7\\0&0&16\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-a-2\\0&0&16\\0&0&-a-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{16}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-a-2\\0&0&1\\0&0&-a-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(a+7)r_2]{r_1+(a+2)r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,0)^T$

故属于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $\lambda_1\alpha_1$，$\lambda_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=3$，解 $(3E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-1&3&1\\-4&6&3a+1\\1&-1&-a\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}-1&3&1\\0&-6&3a-3\\0&2&-a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1]{-\frac{1}{6}r_2}\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&1&\frac{-a+1}{2}\\0&2&-a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{-3a+1}{2}\\0&1&\frac{-a+1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_2=\left(\frac{3a-1}{2},\frac{a-1}{2},1\right)^T$

故属于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $\lambda_2\alpha_2$，$\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

对 $\lambda=a$，解 $(aE-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}a-4&3&1\\-4&a+3&3a+1\\1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-4&a+3&3a+1\\a-4&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-(a-4)r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&a-1&3a-11\\0&a-1&3a-11\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{a-1}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&\frac{3a-11}{a-1}\\0&a-1&3a-11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-(a-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{-8}{a-1}\\0&1&\frac{3a-11}{a-1}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得一个基础解系 $\alpha_3=\left(\frac{8}{a-1},-\frac{3a-11}{a-1},1\right)^T$

故属于特征值 a 的全部特征向量为 $\lambda_3\alpha_3$，$\lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. □

4. 证明方阵 A 与 A^T 有相同的特征值。进一步，是否对应相同的特征向量，若成立，则给出证明，否则给出反例.

证明：λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0 \Leftrightarrow |(\lambda E-A)^T|=0 \Leftrightarrow |\lambda E-A^T|=0 \Leftrightarrow \lambda$ 是 A^T 的特征值.

但并不对应相同的特征向量.

如 $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，但 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\neq 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ □

5. 设 λ_0 为 A 的特征值，γ_0 为 B 的特征值，证明 λ_0 与 γ_0 均为 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 的特征值.

证明：由题意知 $|\lambda_0E-A|=0$，$|\gamma_0E-B|=0$.

事实上，λ 为 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ 为 A 的特征值或 λ 为 B 的特征值.

因此 $\left|\lambda_0E-\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda_0E-A&0\\0&\lambda_0E-B\end{vmatrix}=|\lambda_0E-A|\times|\lambda_0E-B|=0$

$\left|\gamma_0E-\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\gamma_0E-A&0\\0&\gamma_0E-B\end{vmatrix}=|\gamma_0E-A|\times|\gamma_0E-B|=0$

故 λ_0, γ_0 均为 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 的特征值 □

任玲玫

6. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\lambda_0$ 为 $\begin{pmatrix}0&A\\A^T&0\end{pmatrix}$ 的非0特征值，证明 λ_0^2 为 A^TA 的特征值

证明、由分块矩阵乘法可知
$$\begin{pmatrix}\lambda_0E&-A\\-A^T&\lambda_0E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&\lambda_0^{-1}A\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0E&0\\-A^T&\lambda_0E-\lambda_0^{-1}A^TA\end{pmatrix}$$

取行列式得
$$\begin{vmatrix}\lambda_0E&-A\\-A^T&\lambda_0E\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}E&\lambda_0^{-1}A\\0&E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_0E&0\\-A^T&\lambda_0E-\lambda_0^{-1}A^TA\end{vmatrix}$$

即
$$\left|\lambda_0E-\begin{pmatrix}0&A\\A^T&0\end{pmatrix}\right|=|\lambda_0E|\times|\lambda_0E-\lambda_0^{-1}A^TA|$$
$$=|\lambda_0^2E-A^TA|$$

若 λ_0 为 $\begin{pmatrix}0&A\\A^T&0\end{pmatrix}$ 的特征值，则左边 $=0$，因此右边 $=0$，所以 λ_0^2 为 A^TA 的特征值 □

7. 设 ξ 既是矩阵 A 的特征向量，也是矩阵 B 的特征向量。

证明：ξ 也是 $A+B$ 和 AB 的特征向量。

证明：设 ξ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，是 B 的属于特征值 μ_0 的特征向量

即 $A\xi=\lambda_0\xi$，$B\xi=\mu_0\xi$.

则 $(A+B)\xi=A\xi+B\xi=\lambda_0\xi+\mu_0\xi=(\lambda_0+\mu_0)\xi$，即 ξ 是 $A+B$ 的属于特征值 $\lambda_0+\mu_0$ 的特征向量

$(AB)\xi=A(B\xi)=A(\mu_0\xi)=\mu_0(A\xi)=\mu_0(\lambda_0\xi)=(\lambda_0\mu_0)\xi$，即 ξ 是 AB 的属于特征值 $\lambda_0\mu_0$ 的特征向量 □

8. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4&2&-1\\1&a&-4\\-3&b&-2\end{pmatrix}$ 有特征值 $-1,-2,-3$，求 a,b 的值.

解：A 的特征多项式
$$\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&-2&1\\-1&\lambda-a&4\\3&-b&\lambda+2\end{vmatrix}\overset{C_2+2C_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda+4&0&1\\-1&\lambda-a+8&4\\3&2\lambda-b+4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+4)\begin{vmatrix}\lambda-a+8&4\\2\lambda-b+4&\lambda+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&\lambda-a+8\\3&2\lambda-b+4\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^3-(a-6)\lambda^2+(-6a+4b+3)\lambda+(-5a+17b-28).$$

由题意知 $-1,-2,-3$ 是 $\varphi(\lambda)=0$ 的三个解

由韦达定理得
$$\begin{cases}-1-2-3=a-6\\(-1)\times(-2)+(-1)\times(-3)+(-2)\times(-3)=-6a+4b+3\\(-1)\times(-2)\times(-3)=-5a+17b-28\end{cases}$$
即
$$\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$$
□

9. 已知3阶矩阵 A 有特征值 $1,2,-3$，求 $A^{-1}+A$ 的特征值.

解：因为 A 有三个不同的特征值，所以 A 可对角化（推论4.3.3）

即有可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,-3)$　于是 $P^{-1}A^{-1}P=(P^{-1}AP)^{-1}=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$

所以 $P^{-1}(A^{-1}+A)P=P^{-1}A^{-1}P+P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2,\frac{5}{2},-\frac{10}{3})$ 故 $A^{-1}+A$ 的特征值为 $2,\frac{5}{2},-\frac{10}{3}$. □

10. 设3阶矩阵 A 有3个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应特征向量为 ξ_1,ξ_2,ξ_3

$B=A^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)A^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)A$.　　「可用高数某一般定理处理 但书上没讲」

证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的任意非0线性组合都是 B 的特征向量.

证明：因为 A 有3个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,

所以有可逆阵 P 使 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，即 $A=P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)P^{-1}$

于是 $B=$ ~~$(P^{-1}AP)$~~ $(P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)P^{-1})^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)P^{-1})^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$=P\,diag(\lambda_1^3,\lambda_2^3,\lambda_3^3)P^{-1}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P\,diag(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2)P^{-1}+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)P\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)P^{-1}$

$$=P\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^3&&\\&\lambda_2^3&\\&&\lambda_3^3\end{pmatrix}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\begin{pmatrix}\lambda_1^2&&\\&\lambda_2^2&\\&&\lambda_3^2\end{pmatrix}+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2\lambda_3&&\\&\lambda_1\lambda_2\lambda_3&\\&&\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3E$$

因此任意非0三维列向量都是 B 的特征向量

特别地，ξ_1,ξ_2,ξ_3 的任意非0线性组合都是 B 的特征向量. □

注：事实上，任意三维列向量都可写成 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的线性组合.

「由定理4.1.2，ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，再用习题三50.」

11. 已知3阶矩阵 A 有特征值 $2,3,-3$，对应特征向量为 $\xi_1=(1,1,2)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$，$\xi_3=(1,-2,-3)^T$ 求 A.

解：令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-2\\2&1&-3\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$

对 (P,E) 做初等行变换

~~$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-2\\2&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}$~~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\2&1&-3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-2&-3&-1&1&0\\0&-3&-5&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&+2&1&1&-1\\0&-3&-5&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&+2&1&1&-1\\0&0&1&1&3&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&7&-4\\0&1&0&-1&-5&3\\0&0&1&1&3&-2\end{array}\right)$$

得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&7&4\\-1&-5&3\\1&3&-2\end{pmatrix}$

于是 $A=$ ~~PAP^{-1}~~ $=P\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-2\\2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&-4\\-1&-5&3\\1&3&-2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2&6&-3\\2&0&6\\4&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&-4\\-1&-5&3\\1&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-25&16\\10&32&-20\\14&40&-25\end{pmatrix}$$ □

12、证明：若A，B为同阶方阵，则AB和BA有相同的特征值.

证明：设A，B为n阶方阵，则由例4.2.10知 $\lambda^n|\lambda E_n-AB|=\lambda^n|\lambda E_n-BA|$

因此 $|\lambda E_n-AB|=|\lambda E_n-BA|$

即AB和BA有相同的特征多项式，因此有相同的特征值. ▯

注：特征向量一般不同，例：$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

13. 设 ξ_1 和 ξ_2 为A的特征向量，且 $\xi_1+\xi_2$ 仍然是A的特征向量，证明 ξ_1，ξ_2 属于相同的特征值

证明：设 ξ_1，ξ_2，$\xi_1+\xi_2$ 分别是A的属于 λ_1，λ_2，λ_0 的特征向量，假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$

即 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$，$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_0(\xi_1+\xi_2)$

则有 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda_0\xi_1+\lambda_0\xi_2$ 即 $(\lambda_1-\lambda_0)\xi_1+(\lambda_2-\lambda_0)\xi_2=0$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，由定理4.3.2得 ξ_1 与 ξ_2 线性无关，因此 $\lambda_1-\lambda_0=0=\lambda_2-\lambda_0$ 得 $\lambda_1=\lambda_0=\lambda_2$，矛盾. ▯

14. 判断下列矩阵是否可对角化，若可以则对角化，否则说明原因.

(1) $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$ ✓(2) $\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&-3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}5&-2&1\\1&2&-1\\-3&3&-1\end{pmatrix}$ ✓(4) $\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-3&3\\2&-2&2\end{pmatrix}$

解：(1)由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&1\\0&\lambda+2&1\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^3$ 得三重特征值 $\lambda=-2$.

因 $-2E-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&+1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 秩为 $r=2$，故 $n-r=3-2=1<3$ 由定理4.3.6知 故不可对角化

(2) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&-1\\-5&\lambda+3&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}$ ~~$\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}\lambda-4&2&-1\\-\lambda+1&\lambda+1&3\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2}\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-2&-1\\-3&\lambda-2&2\\-2&0&\lambda\end{vmatrix}$~~

$\xlongequal{c_1+c_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-1\\\lambda-2&\lambda+3&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&\lambda+3&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&\lambda+1&3\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-6)=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

得特征值为 $\lambda=2$ (2重)，$\lambda=-3$.

对 $\lambda=2$，解方程组 $(2E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-5&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_1]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-5&5&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+5r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-3\\0&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$

知 $2E-A$ 秩为 $r=2$，故 $n-r=3-2=1<2$ =重数

由定理4.3.6知 A不可对角化.

(3) 由 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{=} (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

得A有三个不同的特征值 $\lambda=1,2,3$.

由推论4.3.3知A可对角化.

对 $\lambda=1$，解 $(E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+6r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得一个基础解系 $\alpha_1=(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1)^T$

对 $\lambda=2$，解 $(2E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得一个基础解系 $\alpha_2=(1,2,1)^T$

对 $\lambda=3$，解 $(3E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-7r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得一个基础解系 $\alpha_3=(1,1,0)^T$

注：$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 1 \\ \frac{5}{6} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则有 $P^{-1}AP=diag(1,2,3)$ 为对角阵

(4) 由 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -3 \\ -2 & \lambda+3 & -3 \\ -2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -3 \\ \lambda+1 & \lambda+3 & -3 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & \lambda+3 & -3 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{c_3+3c_1}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ ~~$=(\lambda+1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix}$~~

$\overset{r_2-r_1}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{r_3-2r_2}{=} (\lambda+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$

得A的特征值为 $\lambda=-1$（2重），$\lambda=2$

对 $\lambda=-1$，解 $(-E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得一个基础解系

$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-\frac{3}{2},0,1)^T$

对 $\lambda=2$，解 $(2E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{9}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-6r_2]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得一个基础解系 $\alpha_3=(1,1,1)^T$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=diag(-1,-1,2)$ 为对角阵 □

15、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}6&-5&-3\\10&-9&-6\\-6&6&5\end{pmatrix}$，求 A^n

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&5&3\\-10&\lambda+9&6\\6&-6&\lambda-5\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&5&3\\\lambda-1&\lambda+9&6\\0&-6&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&5&3\\1&\lambda+9&6\\0&-6&\lambda-5\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&5&3\\0&\lambda+4&3\\0&-6&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$

得A的特征值 $\lambda=1,-1,2$.

分别求解 $(E-A)x=0$, $(-E-A)x=0$, $(2E-A)x=0$ 得A的分别属于1，-1，2的特征向量

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}\\1&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$ 即 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}$

由 $(P,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-\frac{1}{2}&1&0&0\\1&-2&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-\frac{1}{2}&1&0&0\\0&-1&-\frac{1}{2}&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&-1&-\frac{1}{2}&-1&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&-1&1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&-1&0&-2&2&1\\0&0&\frac{1}{2}&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[2r_3]{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-2&2&2\end{array}\right)$

得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-2&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}$

因此有 $A^n=P\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}\\1&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-2&-1\\-2&2&2\end{pmatrix}=$ ~~$(2+2\times(-1)^{n+1}$~~

$=\begin{pmatrix}2+2\times(-1)^{n+1}+2^n&-1+2\times(-1)^n-2^n&(-1)^n-2^n\\2+4\times(-1)^{n+1}+2^{n+1}&-1+4\times(-1)^n-2^{n+1}&2\times(-1)^n-2^{n+1}\\2\times(-1)^n-2^{n+1}&2\times(-1)^{n+1}+2^{n+1}&(-1)^{n+1}+2^{n+1}\end{pmatrix}$ □

√16、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\1&b+1&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&b\\0&2&2a\end{pmatrix}$ 相似，求P使得 $P^{-1}AP=B$.

~~解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\-1&\lambda-3&0\\-1&-b+1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-2)(\lambda-4)$ 得A的特征值 $\lambda=a,2,4$.~~

由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\0&\lambda-4&-b\\0&-2&\lambda-2a\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2-(2a+4)\lambda+8a-2b)$

由A，B相似知 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，故 $(\lambda-a)(\lambda-2)=\lambda^2-(2a+4)\lambda+8a-2b$ 故 $a=-2$，$b=-6$

故 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\1&-7&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&-6\\0&2&-4\end{pmatrix}$

分别解 $(-2E-A)x=0$, $(2E-A)x=0$, $(4E-A)x=0$ 得A的分别属于-2，2，4的特征向量

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

分别解 $(-2E-B)x=0$, $(2E-B)x=0$, $(4E-B)x=0$ 得B的分别属于-2，2，4的特征向量

$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-1\\0&-\frac{1}{2}&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}$

令 $R=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&3&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $R^{-1}BR=\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}$. 即 $B=R\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&4\end{pmatrix}R^{-1}$

因此 ~~B=~~ 若令 $P=QR^{-1}$，则 $B=RQ^{-1}AQR^{-1}=P^{-1}AP^{-1}$.

由 $(R,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\1&3&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\1&3&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&2&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$ 得 $R^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&0&0\end{pmatrix}$

故 $P=QR^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-1\\0&-\frac{1}{2}&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\1&0&1\end{pmatrix}$ □

17. 已知 n 阶矩阵 A 有关系式 $A^2-3A+2E=0$，试证 A 可对角化.

证明：设 λ_0 为 A 的特征值，则 $\lambda_0^2-3\lambda_0+2=0$，因此 $\lambda_0=1$ 或 2.

由 $A^2-3A+2E=0$ 可知 $(A-E)(A-2E)=0=(A-2E)(A-E)$ （$\lambda E-A$）

因此 $0=r((A-E)(A-2E))\geq r(A-E)+r(A-2E)-n$ 故 $r(A-E)+r(A-2E)\leq n$.

因此 $(n-r(A-E))+(n-r(A-2E))\geq n$

所以 $(A-E)x=0$ 的一个基础解系向量个数 $+$ $(A-2E)x=0$ 的一个基础解系向量个数 $\geq n$.

而两者相加 $\leq$ A 的线性无关特征向量的个数 $\leq n$

故两者相加 $=n$，A 有 n 个线性无关的特征向量，故 A 可对角化 □

18. 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=r_1$，$r(A+E)=r_2$，$r(A+2E)=r_3$，且 $r_1+r_2+r_3=2n$，证明 A 可对角化.

证明：~~[illegible]~~ $0,-1,-2$ 是 A 的可能的特征值，重数相加 $\geq(n-r_1)+(n-r_2)+(n-r_3)=n$.

故只能为 n，因此 A 没有其它特征值.

又由 $(n-r_1)+(n-r_2)+(n-r_3)=n$ 知 A 有 n 个线性无关的特征向量

故 A 可对角化. □

（可用定理 5.3.6.）

19. 求向量 $\alpha_1=(1,2,4,-2)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,-1)^T$ 的内积及各个向量的长度

解：$(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^T\alpha_2=(1,2,4,-2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=5$

$\|\alpha_1\|=\sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)}=\sqrt{\alpha_1^T\alpha_1}=\sqrt{(1,2,4,-2)\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-2\end{pmatrix}}=\sqrt{25}=5$，$\|\alpha_2\|=\sqrt{\alpha_2^T\alpha_2}=\sqrt{(1,-1,1,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}=\sqrt{4}=2$ □

65.

20. 求向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ 之间的夹角

解：$(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^T\alpha_2=(1,2,2)\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=4$, $\|\alpha_1\|=\sqrt{\alpha_1^T\alpha_1}=\sqrt{(1,2,2)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}=3$, $\|\alpha_2\|=\sqrt{\alpha_2^T\alpha_2}=\sqrt{(2,-1,2)\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}=3$

因此 α_1,α_2 之间的夹角为 $\theta=\arccos\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{\|\alpha_1\|\|\alpha_2\|}=\arccos\frac{4}{9}$. □

21. 证明：$\|\beta_1+\beta_2\|^2+\|\beta_1-\beta_2\|^2=2(\|\beta_1\|^2+\|\beta_2\|^2)$

证明：$\|\beta_1+\beta_2\|^2+\|\beta_1-\beta_2\|^2=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_2)+(\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)=(\beta_1,\beta_1+\beta_2)+(\beta_2,\beta_1+\beta_2)+(\beta_1,\beta_1-\beta_2)-(\beta_2,\beta_1-\beta_2)$

$=(\beta_1,\beta_1)+(\beta_1,\beta_2)+(\beta_2,\beta_1)+(\beta_2,\beta_2)+(\beta_1,\beta_1)-(\beta_1,\beta_2)-(\beta_2,\beta_1)+(\beta_2,\beta_2)$

$=2\left((\beta_1,\beta_1)+(\beta_2,\beta_2)\right)=2\left(\|\beta_1\|^2+\|\beta_2\|^2\right)$ □

22. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 为 n 维正交向量组，$Q\in R^{n\times n}$ 为正交矩阵，$\beta_i=Q\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,r$

证明：$\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 也为正交向量组.

证明：由题意知 $\alpha_i^T\alpha_j=(\alpha_i,\alpha_j)=0 \quad \forall\, 1\le i\ne j\le r$

$Q^TQ=E=QQ^T$

因此 $\forall\, 1\le i\ne j\le r$ 有 $(\beta_i,\beta_j)=\beta_i^T\beta_j=(Q\alpha_i)^T(Q\alpha_j)=\alpha_i^TQ^TQ\alpha_j=\alpha_i^T\alpha_j=0$

即 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 为正交向量组. □

23. 将向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交化.

解：令 $\xi_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{3}^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\xi_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1-\frac{(\alpha_3,\xi_2)}{\|\xi_2\|^2}\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\2/3\end{pmatrix}$

得与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的正交向量组 ξ_1,ξ_2,ξ_3 □.

24. 将向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 标准正交化.

解：令 $\xi_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\xi_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\xi_1)}{\|\xi_1\|^2}\xi_1-\frac{(\alpha_3,\xi_2)}{\|\xi_2\|^2}\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$

再单位化 $\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\end{pmatrix}$, $\beta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{pmatrix}$ 得单位正交向量组 β_1,β_2,β_3 □

25. 证明：若 A, B 为同阶正交矩阵，且 $|A|=-|B|$，则有 $|A+B|=0$.

证明：A, B 为同阶正交阵 $\Rightarrow$ $A^{-1}B$ 为正交阵，又由 $|A|=-|B|$ 知 $|A^{-1}B|=-1$.

因此 $|A+B| = |A(E+A^{-1}B)| = |A| \times |E+A^{-1}B| \overset{习题2.16}{=} |A| \times 0 = 0$. □

26. 用正交矩阵作为相似变换矩阵将下列实对称阵对角化.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

解：(1) 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-6 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{r_2-2r_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -2\lambda+4 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{c_3+2c_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & \lambda-5 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -5 \\ -1 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16) = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$

得 A 的两个特征值 $\lambda=2$ (二重), $\lambda=8$.

对 $\lambda=2$，解 $(2E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得一个~~基础解系~~线性无关的特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 标准正交化得 $\beta_1=\begin{pmatrix} -2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$.

对 $\lambda=8$，解 $(8E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac12 r_1]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-5r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac13 r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得单位特征向量 $\beta_3=\begin{pmatrix} 1/\sqrt6 \\ 2/\sqrt6 \\ 1/\sqrt6 \end{pmatrix}$

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix}$

则 $P^TP=E$，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{r_1-r_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -\lambda+2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{c_3+c_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -4 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8) = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+2)$

得 A 的三个特征值 $\lambda=2, 4, -2$.

对 $\lambda=2$，解 $(2E-A)x=0$，由

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac12 r_2]{-\frac12 r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得单位特征向量 $\beta_1=\begin{pmatrix} -1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix}$

对 $\lambda=4$，解 $(4E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&4&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\beta_2=\begin{pmatrix}+1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

对 $\lambda=-2$，解 $(-2E-A)x=0$，由

$$\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-2&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}-4&-2&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{-\frac{1}{4}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\beta_3=\begin{pmatrix}+1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

则 $P^TP=E$，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}2&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}$ □

27. 已知3阶实对称阵A每一行的和均为3，且其特征值均为正整数，$|A|=3$，求A.

解. 由题意有 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，因此3是A的特征值.

设另两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\lambda_1,\lambda_2>0$，且 $3\lambda_1\lambda_2=|A|=3$. 所以 $\lambda_1=\lambda_2=1$.

由 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是A的属于3的特征向量知 A的属于1的所有特征向量 $\alpha\neq0$ 满足 $(\alpha,\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})=0$

~~令 α = (…)~~，得 $\alpha=\mu_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\mu_1,\mu_2$ 不全为0.

对 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 做标准正交化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

则 $A=P\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ □

28. 已知3阶实对称阵第1列为 $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$，有两个特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，求A

解：设 α 为单位向量，与 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 正交. 解之得 $\alpha=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

对 $\alpha,\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 做标准正交化得 $\eta_1=\alpha=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，$\alpha,\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量

则 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}P^T=$ ~~$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)&\frac{1}{\sqrt{6}}(-\lambda_1+\lambda_3)&\frac{1}{3\sqrt{2}}(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)\\\frac{1}{\sqrt{6}}(-\lambda_1+\lambda_3)&\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3)&\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\lambda_1+\lambda_3)\\\frac{1}{3\sqrt{2}}(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)&\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\lambda_1+\lambda_3)&\frac{1}{6}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\end{pmatrix}$~~ $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3&-\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_3&\frac{1}{3}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3\\-\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_3&\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{2}{3}\lambda_3&-\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_3\\\frac{1}{3}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3&-\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_3&\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3\end{pmatrix}$

陆埝捌

~~因此 $\begin{cases} \frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-\lambda_1+\lambda_3)=-1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3)=2 \end{cases}$ 可得 $\lambda_1+\lambda_3=4+2\sqrt{2}$ 于是 $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6 \\ -\lambda_1+\lambda_3=-\sqrt{2} \\ \lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3=6\sqrt{2} \\ \lambda_1+\lambda_3=4+2\sqrt{2} \\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=8-2\sqrt{2} \end{cases}$~~

λ_1

因此 $\begin{cases} \frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3=2 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1+\frac{1}{3}\lambda_3=-1 \\ \frac{1}{3}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\frac{1}{6}\lambda_3=2 \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} \lambda_1=5 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$ 故 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. □

另：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$，代入特征向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 也可. □

习题五：

1. 用正交变换法求非退化线性变换，将下列二次型化为标准形：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3+0-x_3^2$

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

解：(1) 该二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-7 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-7 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-7 & -4 & -2 \\ -2 & \lambda-5 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-12\lambda+27)=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-9)$

得A的特征值为 $\lambda=1,3,9$.

对 $\lambda=1$，可求得单位特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

对 $\lambda=3$，可求得单位特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

对 $\lambda=9$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ 则有 $P^TP=E$，$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$

故在线性变换 $\begin{cases} x_1=-1/\sqrt{3}\,y_2+2/\sqrt{6}\,y_3 \\ x_2=-1/\sqrt{2}\,y_1+1/\sqrt{3}\,y_2+1/\sqrt{6}\,y_3 \\ x_3=1/\sqrt{2}\,y_1+1/\sqrt{3}\,y_2+1/\sqrt{6}\,y_3 \end{cases}$

下，原二次型化成标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+3y_2^2+9y_3^2$

陆拾玖

(2) 该二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\-1&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\-\lambda+2&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\0&\lambda-4&-4\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$

得A的三个特征值 $\lambda=0,2,6$

对 $\lambda=0$，可求得单位特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}$

对 $\lambda=2$，可求得单位特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix}$

对 $\lambda=6$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6&-1/\sqrt2&1/\sqrt3\\-1/\sqrt6&1/\sqrt2&1/\sqrt3\\2/\sqrt6&0&1/\sqrt3\end{pmatrix}$ 则 $P^TP=E$，$P^TAP=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$

故在线性变换 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{\sqrt6}y_1-\frac{1}{\sqrt2}y_2+\frac{1}{\sqrt3}y_3\\x_2=-\frac{1}{\sqrt6}y_1+\frac{1}{\sqrt2}y_2+\frac{1}{\sqrt3}y_3\\x_3=\frac{2}{\sqrt6}y_1+\frac{1}{\sqrt3}y_3\end{cases}$

下，原二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+6y_3^2$

(3) 该二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-2\\2&\lambda+1&-1\\-2&-1&\lambda+1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-2\\2&\lambda+1&-1\\0&\lambda&\lambda\end{vmatrix}\overset{c_2-c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-2&4&-2\\2&\lambda+2&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-12)=\lambda(\lambda-2\sqrt3)(\lambda+2\sqrt3)$

得A的特征值 $\lambda=0, 2\sqrt3, -2\sqrt3$.

对 $\lambda=0$，可求得单位特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}$

对 $\lambda=2\sqrt3$，可求得单位特征向量 $\eta_2=\begin{pmatrix}(\sqrt3+1)/\sqrt{6+2\sqrt3}\\-1/\sqrt{6+2\sqrt3}\\+1/\sqrt{6+2\sqrt3}\end{pmatrix}$

对 $\lambda=-2\sqrt3$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}-(\sqrt3+1)/\sqrt{6+2\sqrt3}\\-1/\sqrt{6+2\sqrt3}\\1/\sqrt{6+2\sqrt3}\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt3+1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}&-\frac{\sqrt3+1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}&-\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}&\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}\end{pmatrix}$ 则 $P^TP=E$，$P^TAP=\begin{pmatrix}0&&\\&2\sqrt3&\\&&-2\sqrt3\end{pmatrix}$

故在线性变换 $\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt3+1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_2-\frac{\sqrt3+1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_3\\x_2=\frac{1}{\sqrt2}y_1-\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_2-\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_3\\x_3=\frac{1}{\sqrt2}y_1+\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt3}}y_3\end{cases}$

下，原二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=2\sqrt3y_2^2-2\sqrt3y_3^2$

(4) 该二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\-\lambda-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\0&\lambda-1&-2\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$

得A的特征值 $\lambda=-1$(2重)，2

对 $\lambda=-1$，可求得相互正交的单位特征向量 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\-1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}$

对 $\lambda=2$，可求得单位特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt2&-1/\sqrt6&1/\sqrt3\\1/\sqrt2&-1/\sqrt6&1/\sqrt3\\0&2/\sqrt6&1/\sqrt3\end{pmatrix}$ 则 $P^TP=E$，$P^TAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

故在线性变换 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt2}y_1-\frac{1}{\sqrt6}y_2+\frac{1}{\sqrt3}y_3\\x_2=\frac{1}{\sqrt2}y_1-\frac{1}{\sqrt6}y_2+\frac{1}{\sqrt3}y_3\\x_3=\frac{2}{\sqrt6}y_2+\frac{1}{\sqrt3}y_3\end{cases}$ 下

原二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$ □

2. 用配方法求非退化线性变换，将下列二次型化为标准形.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2+6x_2x_3+3x_3^2$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$

(4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+x_3^2$

$=3(x_1-\frac13x_2+\frac23x_3)^2+\frac53x_2^2+\frac43x_2x_3-\frac13x_3^2$

$=3(x_1-\frac13x_2+\frac23x_3)^2+\frac53(x_2-\frac25x_3)^2-\frac35x_3^2$

得到原二次型的标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+\frac53y_2^2-\frac35y_3^2$

所用线性变换为 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac13x_2+\frac23x_3\\y_2=x_2-\frac25x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2+6x_2x_3+3x_3^2=3(x_2+x_3)^2$

得原二次型的标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=3y_2^2$ 所用线性变换为 $\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

朱琳嘉

(3) 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) + 4(y_1+y_2)y_3 - 2(y_1-y_2)y_3$

$= 2y_1^2 + 2y_1y_3 - 2y_2^2 + 6y_2y_3$

$= 2(y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - 2y_2^2 + 6y_2y_3 - \frac{1}{2}y_3^2$

$= 2(y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - 2(y_2 - \frac{3}{2}y_3)^2 + 4y_3^2$

得二次型的标准形 $g(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

所用线性变换为 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = y_2 - \frac{3}{2}y_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases}$

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2$

$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_2x_3 - x_2x_4 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + \frac{3}{2}x_4^2$

$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4)^2 + \frac{4}{3}x_3^2 + \frac{8}{3}x_3x_4 + \frac{4}{3}x_4^2$

$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4)^2 + \frac{4}{3}(x_3 + x_4)^2$

得二次型的标准形 $g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{4}{3}y_3^2$

所用线性变换为 $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ y_3 = x_3 + x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$

□

3. 用合同变换法求非退化线性变换，将下列二次型化为标准形

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 9x_3^2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + 11x_3^2 + 4x_3x_4 - 6x_4^2$

解：(1) 该二次型的矩阵形式为 $f(x) = x^TAx$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

做如下合同变换：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3+3c_1]{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-\frac{1}{2}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则在线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$ 下，二次型化为标准形 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 12y_2^2 - 3y_3^2$

(2) 该二次型的矩阵形式为 $f(x)=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\-1&2&1&2\\2&1&11&2\\-2&2&2&-6\end{pmatrix}$； $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

做如下合同变换：

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\-1&2&1&2\\2&1&11&2\\-2&2&2&-6\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3-2c_1\\c_4+2c_1}]{c_2+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&3&0\\2&3&7&6\\-2&0&6&-10\\1&1&-2&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4+2r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&3&7&6\\0&0&6&-10\\1&1&-2&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&3&-2&6\\0&0&6&-10\\1&1&-5&2\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&6\\0&0&6&-10\\1&1&-5&2\\0&1&-3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4+3c_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&6&8\\1&1&-5&-13\\0&1&-3&-9\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&8\\1&1&-5&-13\\0&1&-3&-9\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则在线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2-5y_3-13y_4\\x_2=y_2-3y_3-9y_4\\x_3=y_3+3y_4\\x_4=y_4\end{cases}$ 下

原二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2+y_2^2-2y_3^2+8y_4^2$ □

4. 证明实反对称阵均合同于形式为 $\begin{pmatrix}&&&1\\&&0&\\&\iddots&&\\-1&&&\end{pmatrix}$ 的矩阵 □

证明：设 A 为实反对称阵。先证 A 的特征值为 0 或为纯虚数。

设 $A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq0$。则 $\left.\begin{matrix}\bar\xi^TA^T=\lambda\bar\xi^T\\A\bar\xi=\bar\lambda\bar\xi\end{matrix}\right\}\Rightarrow \bar\xi^TA^T\bar\xi=\bar\xi^T(-A\bar\xi)=-\bar\lambda\bar\xi^T\bar\xi$，其中 $\bar\xi^TA^T\bar\xi=\lambda\bar\xi^T\bar\xi$

于是 $\lambda=-\bar\lambda$，所以 $\lambda=0$ 或 λ 纯虚

若 A 的特征值全为 0，断言：A = 0。用数归法证明。

$n=1$：✓

假设 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时。

设 $A\xi=0$，$\xi\neq0$，将 ξ 扩充为线性无关向量 $\xi_1=\xi,\xi_2,\cdots,\xi_{k+1}$

并标准正交化得标准正交组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{k+1}$。令 $Q=(\eta_1,\cdots,\eta_{k+1})$

则 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&c_1&\cdots&c_k\\0&b_{11}&\cdots&b_{1k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&b_{k1}&\cdots&b_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&C\\0&B\end{pmatrix}$ 由 A 反对称知 $C=0$，且 B 反对称。

又 $|\lambda E-A|=\left|\lambda E-\begin{pmatrix}0&C\\0&B\end{pmatrix}\right|=\lambda\cdot|\lambda E-B|$，故 B 的特征值也全为 0。

由归纳假设得 $B=0$ 故 $Q^TAQ=0$ 故 $A=0$。

因此若 A 的特征值全为 0，则 A 合同于 0。

下设 A 的特征值不全为 0（即 $A\neq0$），设 $\lambda=a\sqrt{-1}$ 是 A 的特征值，$a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$A(\xi_1+\xi_2\sqrt{-1})=(a\sqrt{-1})(\xi_1+\xi_2\sqrt{-1})$

其中 $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 则有 $A\xi_1=-a\xi_2$，$A\xi_2=a\xi_1$。 ~~[illegible]~~

朱拾念

则 $a\xi_1^T\xi_2 = \xi_1^T(a\xi_2) = \xi_1^T(-A\xi_1) = \xi_1^T(A^T\xi_1) = (A\xi_1)^T\xi_1 = -a\xi_2^T\xi_1 = -a\xi_1^T\xi_2$

因 $a\neq 0$ 故 ξ_1 与 ξ_2 正交，将 ξ_1,ξ_2 扩充为线性无关组 ξ_1, ~~…~~ $\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$

并标准正交化 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots, \eta_n$

则有 $A\eta_1 = -a\eta_2$，$A\eta_2 = a\eta_1$，因 $\eta_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1$，$\eta_2 = \frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2$.

令 $Q = (\eta_1, \eta_3, \cdots, \eta_n, \eta_2)$ [顺序!]

则 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \cdots c_{n-2} & a \\ \vdots & B & 0 \\ 0 & & \vdots \\ -a & d_1 \cdots d_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$ ~~由A反对称得 $c_1, \cdots, c_{n-2}, d_1, \cdots, d_{n-2} = 0$~~

令 $Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$，则 $Q_1^TQ^TAQQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1' \cdots c_{n-2}' & 1 \\ \vdots & B' & \vdots \\ 0 & & \\ -1 & d_1' \cdots d_{n-2}' & 0 \end{pmatrix}$

由A反对称 得上述矩阵反对称，因此 $c_1', \cdots, c_{n-2}', d_1', \cdots, d_{n-2}' = 0$，且 B' 反对称，

由归纳假设，B' 合同于 $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$，即有可逆 P 使 $P^TB'P = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & \iddots & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & P & \\ & & 1 \end{pmatrix}^T Q_1^TQ^TAQQ_1 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & P & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & P^T & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & B' & & \vdots \\ 0 & & & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & P & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & P^TB'P & & \vdots \\ 0 & & & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{pmatrix}$ □

5. 求下列二次型的正负惯性指数.

(1) $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 + 2x_3x_4 + 4x_4^2$

(3) $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$

(4) $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，其中 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$，$n\ge 2$

解：(1) 二次型对应矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 \\ -\lambda+2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-6 & -4 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda-14) = (\lambda-2)(\lambda-7)(\lambda+2)$

得A的特征值为 $\lambda = 2, 7, -2$

故该二次型正负惯性指数分别为 2, 1. □

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$

$=(x_1+x_2)^2+x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$

$=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+2x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$

$=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+2(x_3+\frac{1}{2}x_4)^2+\frac{7}{2}x_4^2$

得标准形 $g(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2+y_2^2+2y_3^2+\frac{7}{2}y_4^2$

故(二次型)正负惯性指数分别为 4, 0.

(3) $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j=(x_1+\cdots+x_n)^2$

得标准形 $g(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2$

故二次型正负惯性指数分别为 1, 0.

(4) 令 $y_1=x_1-\bar{x},\cdots,y_{n-1}=x_{n-1}-\bar{x}$，$y_n=x_n$，则 $x_n-\bar{x}=-(x_1-\bar{x})-\cdots-(x_{n-1}-\bar{x})=-y_1-\cdots-y_{n-1}$

得 $g(y_1,\cdots,y_n)=f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2+(-y_1-\cdots-y_{n-1})^2$

$=2y_1^2+2y_1y_2+\cdots+2y_1y_{n-1}+2y_2^2+2y_2y_3+\cdots+2y_2y_{n-1}+\cdots+2y_{n-2}^2+2y_{n-2}y_{n-1}+2y_{n-1}^2$

对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1&0\\1&2&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1&\vdots\\1&\cdots&1&2&0\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&\cdots&-1&0\\-1&\lambda-2&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&-1&\vdots\\-1&\cdots&-1&\lambda-2&0\\0&\cdots&\cdots&0&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[2\le i\le n-1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&\cdots&-1&0\\-\lambda+1&\lambda-1&0\cdots&0&\vdots\\\vdots&0&\ddots&\vdots&\vdots\\-\lambda+1&0\cdots&0&\lambda-1&0\\0&\cdots&\cdots&0&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}}\begin{vmatrix}\lambda-n&-1&\cdots&-1&0\\0&\lambda-1&0\cdots&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&\lambda-1&0\\0&\cdots&\cdots&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-n)(\lambda-1)^{n-2}\lambda$

得 A 的特征值 $\lambda=n$, 1 ($n-2$重), 0

故二次型的正负惯性指数分别为 $n-1$, 0. □

6. 设 A 为实对称阵，λ_1,λ_2 为 A 的最小和最大特征值，证明：$\forall t\in[\lambda_1,\lambda_2]$，存单位向量 x 使得 $x^TAx=t$.

思路~~解证明~~：观察 设 ξ_1,ξ_2 为单位向量 s.t. $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$, $A\xi_2=\lambda_2\xi_2$

可取 ξ_1,ξ_2 正交.

则 $\xi_1^TA\xi_1=\lambda_1$，$\xi_2^TA\xi_2=\lambda_2$

取 ξ_1,ξ_2 的某个组合 x，应可使 $x^TAx=t$.

$x=\mu_1\xi_1+\mu_2\xi_2$　则 x 单位向量 $\Leftrightarrow\mu_1^2+\mu_2^2=1$.

柒拾伍

（$\lambda_1 \le \lambda_2$ 时自动，$\lambda_1 = \lambda_2$ 时可取到）

证明：设 ξ_1, ξ_2 为单位正交向量 s.t. $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$

易见~~断言~~：$\forall t \in [\lambda_1, \lambda_2]$，有 $0 \le a \le 1$ s.t. ~~$t = \sqrt{1-a}\lambda_1 + \sqrt{a}\lambda_2$~~ $t = (1-a)\lambda_1 + a\lambda_2$

~~令 $t(a) = \sqrt{1-a}\lambda_1 + \sqrt{a}\lambda_2$ 则 $t(a)$ 是 a 的连续函数，且 $t(0) = \lambda_1$，$t(1) = \lambda_2$~~

~~故由连续函数中值定理，$\forall t \in [\lambda_1, \lambda_2]$，有 $a \in [0,1]$ s.t. $t(a) = t$.~~

~~现 $\forall t \in [\lambda_1, \lambda_2]$，取 x 令 $a \in [0,1]$ s.t. $t(a) = t = \sqrt{1-a}\lambda_1 + \sqrt{a}\lambda_2$~~

取 $x = \sqrt{1-a}\,\xi_1 + \sqrt{a}\,\xi_2$，

则 $x^TAx = (\sqrt{1-a}\,\xi_1 + \sqrt{a}\,\xi_2)^T A (\sqrt{1-a}\,\xi_1 + \sqrt{a}\,\xi_2)$

$= (1-a)\xi_1^TA\xi_1 + \sqrt{1-a}\sqrt{a}\,\xi_1^TA\xi_2 + \sqrt{a}\sqrt{1-a}\,\xi_2^TA\xi_1 + a\xi_2^TA\xi_2$

$= (1-a)\lambda_1\xi_1^T\xi_1 + \sqrt{1-a}\sqrt{a}\lambda_2\xi_1^T\xi_2 + \sqrt{a}\sqrt{1-a}\lambda_1\xi_2^T\xi_1 + a\lambda_2\xi_2^T\xi_2$

$= (1-a)\lambda_1 + a\lambda_2 = t$ □

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为列满秩矩阵，证明 $B = A^TA$ 为正定矩阵.

证明：设 x 为非0实向量，因 A 为列满秩矩阵，故 $Ax \ne 0$

于是 $x^TBx = x^TA^TAx = (Ax)^T(Ax) = (Ax, Ax) > 0$

所以 B 为正定矩阵. □

8. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，证明 $k_1A + k_2B$，$k_1, k_2 > 0$ 也对称正定

证明：因 A, B 对称，故 $A^T = A$，$B^T = B$.

所以 $(k_1A + k_2B)^T = k_1A^T + k_2B^T = k_1A + k_2B$，即 $k_1A + k_2B$ 对称.

下证 $k_1A + k_2B$ 正定

因 A, B 正定，故 $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，有 $x^TAx > 0$，$x^TBx > 0$

又 $k_1, k_2 > 0$，

因此 $x^T(k_1A + k_2B)x = k_1x^TAx + k_2x^TBx > 0$

所以 $k_1A + k_2B$ 正定 □

Mo Tu We Th Fr Sa Su

9. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 证明 $\exists\ \xi\in\mathbb{R}^{m+n}$, $\xi\neq 0$ s.t. $\xi^T\begin{pmatrix}A&0\\0&-B\end{pmatrix}\xi=0$

证明: 因为 A,B 对称正定, 所以有 $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$ $x\neq0, y\neq0$ s.t. $x^TAx=t_1>0$, $y^TAy=t_2>0$.

则有 $\left(\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\right)^TA\left(\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\right)=t_2$

令 $\xi=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\\y\end{pmatrix}$, 则 $\xi\neq0$, 且 $\xi^T\begin{pmatrix}A&0\\0&-B\end{pmatrix}\xi=\left(\left(\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\right)^T, y^T\right)\begin{pmatrix}A&0\\0&-B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\\y\end{pmatrix}$

$=\left(\left(\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\right)^TA, -y^TB\right)\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\\y\end{pmatrix}$

$=\left(\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}\right)^TA\frac{x}{\sqrt{t_1}/\sqrt{t_2}}-y^TBy=t_2-t_2=0$ □

10. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 均为对称矩阵, $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 对称正定, 证明 A,B 均为对称正定矩阵.

证明: $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 非0, 因为 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 正定有 $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=x^TAx>0$

故 A 正定

$\forall y\in\mathbb{R}^n$ 非0, 因为 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 正定有 $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=y^TBy>0$

故 B 正定 □

12. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵, 证明 $B=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 当 $b_1,\cdots,b_n$ 全为非0常数时为正定.

证明: 设 $b_1,\cdots,b_n$ 全为非0常数 设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 为任意非0向量

则 $x^TBx=\sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij}b_ib_jx_j=\sum_{i,j=1}^n(b_ix_i)a_{ij}(b_jx_j)$

因此令 $y=\begin{pmatrix}b_1x_1\\\vdots\\b_nx_n\end{pmatrix}$, 则 $x^TBx=y^TAy$.

因为 $x_1,\cdots,x_n$ 不全为0, $b_1,\cdots,b_n$ 全不为0, 故 $b_1x_1,\cdots,b_nx_n$ 不全为0 即 $y\neq0$.

因为 A 正定, 所以 $y^TAy>0$. 所以 $x^TBx>0$ 所以 B 正定. □

13. 设 A 为实对称正定矩阵, P 为可逆矩阵, 用定义证明 P^TAP 也是对称正定矩阵.

反之若 P^TAP 正定, 则方阵 P 可逆.

证明: 设 P 可逆. $A_{n\times n}$ 对称正定, 则 $A^T=A$.

首先, $(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TA^TP$ 故 P^TAP 对称.

其次, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 非0, 有 $Px\neq0$ 故有 $x^T(P^TAP)x=(Px)^TA(Px)>0$ (由A正定) 故 P^TAP 正定.

柒拾柒

强设 P^TAP 正定，A正定，要证 P可逆。

反证法，假设 P不可逆，则 ∃ $x \in \mathbb{R}^n$ 非0 s.t. $Px=0$.（齐次方程组 $Px=0$ 有非零解，则）

对此 x，有 $x^T(P^TAP)x = (Px)^TA(Px) = 0$，与 P^TAP 正定矛盾。□

13. 判别下列矩阵的正定性：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}1&&&&-1\\&1&&-1&\\&&1&&\\&-1&&2&\\-1&&&&3\end{pmatrix}$

证明：(1) 显然 A为实对称阵，

又 $1>0$，$\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2>0$，$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0$

各阶主子式均>0，故A为正定矩阵。

(2) 显然A为实对称阵，用合同变换法化A为标准形

$$\begin{pmatrix}1&&&&-1\\&1&&-1&\\&&1&&\\&-1&&2&\\-1&&&&3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&2&0\\-1&0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_5+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_4+c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

对角线元素均>0 得正惯性指数为5，故A正定□

14. 判别下列二次型的正定性：

(1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+6x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2-4x_1x_2+8x_1x_3+6x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2$

(3) $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$

(4) $f(x_1,\cdots,x_n) = 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$

解：(1) $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+6x_3^2 = (x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2+2x_3^2$

故f的标准形为 $g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2+y_2^2+2y_3^2$，正惯性指数为3，

所以f正定。

(2) f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-2&4\\-2&6&-2\\4&-2&2\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -4 \\ 2 & \lambda-6 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 & -4 \\ 0 & \lambda-6 & 2 \\ -\lambda-2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 & -4 \\ 0 & \lambda-6 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-12\lambda+28) = (\lambda+2)(\lambda-5)(\lambda-7)$

得A的特征值为 $\lambda=-2,5,7$. 不全为正，因此 A，f 非正定.

(3) $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$ ~~$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)^2$~~

的矩阵为 $A_n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 注意到 A_n 的第 $n-1$ 阶顺序主子式为 $|A_{n-1}|$

~~由 $|A_1|=1$，$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}$，$|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$~~

而 $|A_n| \xlongequal[2\le i\le n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}_{n\times n} \xlongequal{c_1+\sum_{2\le i\le n} c_i} \begin{vmatrix} \frac{n+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{n+1}{2}>0$

故 A_n 的各阶顺序主子式为正，故 f 正定

(4) $f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+2x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2)+x_n^2=x_1^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1})^2+x_n^2\ge 0$

若 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$，则 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_1+x_2=0 \\ \vdots \\ x_{n-1}+x_n=0 \\ x_n=0 \end{cases}$ 解之得 $x_1=\cdots=x_n=0$

因此若 $x_1,\cdots,x_n$ 不全为0，则 $f(x_1,\cdots,x_n)>0$. 因此 f 正定 □.

15. 讨论 t 取何值时，下列二次型是正定的.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+2tx_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=(t+1)x_1^2-2x_1x_2+(t+2)x_2^2-2x_2x_3+(t+1)x_3^2$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_3^2$.

解: (1) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 10 & t & 3 \\ t & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，A 的各阶顺序主子式为 10，$\begin{vmatrix} 10 & t \\ t & 5 \end{vmatrix}=50-t^2$

~~$\begin{vmatrix} 10 & t & 3 \\ t & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1\leftrightarrow r_3]{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 1 & t & 3 \\ t & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-tr_1} \begin{vmatrix} 1 & t & 3 \\ 0 & 5-t^2 & 2-3t \\ 0 & 2-3t & 1 \end{vmatrix} = (5-t^2)-(2-3t)^2 = 1+12t-10t^2$~~

~~所以 A 正定 ⇔ $50-t^2>0$，$1+12t-10t^2>0$~~

$\begin{vmatrix} 10 & t & 3 \\ t & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1\leftrightarrow r_3]{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & t \\ 3 & t & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & t-6 \\ 0 & t-6 & 1 \end{vmatrix} = -t^2+12t-35$

所以 A 正定 $\Leftrightarrow$ $50-t^2>0$, $-t^2+12t-35>0$ $\Leftrightarrow$ $5<t<7$.

(2) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ -1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$

A 的各阶顺序主子式为 $t+1$, $\begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ -1 & t+2 \end{vmatrix} = t^2+3t+1$

$$\begin{vmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ -1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3} \begin{vmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ 0 & t+2 & -1 \\ -t-1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} \begin{vmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ 0 & t+2 & -1 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)(t^2+3t)$$

所以 A 正定 $\Leftrightarrow$ $t+1>0$, $t^2+3t+1>0$, $t^2+3t>0$ $\Leftrightarrow$ ~~$t>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$~~. $t>0$

(3) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$

A 的各阶顺序主子式为 t, $\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2-1$,

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_3} \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 0 & t & -1 \\ t+2 & -1 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ 0 & t+1 & -1 \\ t+2 & -t-2 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ t+1 & t+1 & -1 \\ 0 & -t-2 & t+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ 0 & t+1 & -2 \\ 0 & -t-2 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)(t^2-3)$$

所以 A 正定 $\Leftrightarrow$ $t>0$, $t^2-1>0$, $(t+1)(t^2-3)>0$

$\Leftrightarrow$ $t>\sqrt{3}$ □

16. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 证明: $\forall r>0$ 和 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$, 有 $\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} \end{vmatrix} >0$

证明: 固定 $r>0$ 和 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$

令 $B=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} \end{pmatrix}$. 则 B 对称.

$\forall x\in\mathbb{R}^r$ 非 0, 令 $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 其中 $y_i=\begin{cases} x_j & 若 i=i_j \\ 0 & 否则 \end{cases}$

则 y 非 0, 且 $x^TBx=y^TAy$

由 A 正定知 $y^TAy>0$ 故 $x^TBx>0$ 因此 B 正定 特别地, $|B|>0$ □

17. 证明: 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 则 A^* 也对称正定

证明: 因为 A 对称正定, 所以由例 5.2.7 知 ∃ 可逆阵 P s.t. $A=P^TP$, 且 $|A|>0$

因此 $A^*=|A|A^{-1}=|A|(P^TP)^{-1}=|A|P^{-1}(P^{-1})^T=(\sqrt{|A|}P^{-1})(\sqrt{|A|}P^{-1})^T$

再由例 5.2.7 知 A^* 正定. □

18、证明：A为正定矩阵的充要条件是A有分解$A=B^2$，其中B为对称正定矩阵．

证明："⇐" 设$A_{n\times n}=B^2$，B为正定对称矩阵　　[$A=B^TB$同用 例5.2.7]

则 $A^T=(B^2)^T=(B^T)^2=B^2=A$，即A对称

且 $\forall x\in\mathbb{R}^n\neq 0$，有$Bx\neq 0$，故 $x^TAx=x^TB^2x=(x^TB)(Bx)=(x^TB^T)(Bx)=(Bx)^T(Bx)>0$

"⇒" 设A为正定矩阵，则∃正交阵P s.t. $A=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P$，且$\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$为A的特征值．

于是 $A=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}PP^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$

$=\left(P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P\right)^2$

即若令 $B=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$ 则 $A=B^2$．□

19．设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$对称正定，$B\in\mathbb{R}^{n\times n}$对称，证明存在合同变换矩阵P s.t. P^TAP与P^TBP均为对角阵．

证明：因为A对称正定，所以由例5.2.7知有可逆阵Q s.t. $A=Q^TQ$．

因为B对称 所以有 $Q^{-T}BQ^{-1}$为对称阵．故有正交阵R s.t. $Q^{-T}BQ^{-1}=R^T\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}R$ 及$d_1,\cdots,d_n\in\mathbb{R}$

于是有 $A=Q^TQ=Q^TR^TRQ=(RQ)^T(RQ)$

$B=Q^TR^T\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}RQ=(RQ)^T\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}(RQ)$

故令 $P=(RQ)^{-1}$，则 $P^TAP=E$，$P^TBP=\begin{pmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{pmatrix}$均为对角阵．□

20．若A正定，证明 $|E+A|>1$

证明：若A正定，则A的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$都$>0$，且有正交阵P s.t. $A=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P$

所以 $|E+A|=\left|E+P^T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P\right|=|P^T|\left|E+\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\right|\cdot|P|=\left|E+\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\right|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$ □

21．已知实对称阵A满足$A^3-6A^2+11A-6E=0$．证明A正定．

证明：设λ为A的特征值，$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq 0$．

则 $0=(A^3-6A^2+11A-6E)\xi=A^3\xi-6A^2\xi+11A\xi-6\xi=(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6)\xi$

由$\xi\neq 0$得 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ 即 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ 即 $\lambda=1$，或2，或3

特别地，A的特征值均正，所以A正定 □

抄对检查

22. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，n维非0向量组 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$ 满足 $\beta_i^TA\beta_j=0$，$1\le i\ne j\le r$.

证明：该向量组线性无关.

证明：设 $\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_r\beta_r=0$

则 $0=(\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_r\beta_r)^TA\beta_j=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\beta_i^TA\beta_j=\mu_j\beta_j^TA\beta_j$（由 $\beta_i^TA\beta_j=0$ 有）

由A正定，β_j 非0，得 $\beta_j^TA\beta_j>0$ 故 $\mu_j=0$

所以 $\mu_1=\cdots=\mu_r=0$．所以 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关．□

23. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}-A & x\\ x^T & 0\end{vmatrix}$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$

证明 f 当 n 为偶数时是正定二次型，n为奇数时是负定二次型.

证明：因为A正定，所以由例15.27知有可逆阵P s.t. $A=P^TP$ 故 $A^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^T$ 也为对称正定阵.（A可逆，且 $|A|>0$，且）

由 $\begin{pmatrix}E_n & 0\\ x^TA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-A & x\\ x^T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A & x\\ 0 & x^TA^{-1}x\end{pmatrix}$ 两边取行列式得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}-A & x\\ 0 & x^TA^{-1}x\end{vmatrix}=|-A|\cdot(x^TA^{-1}x)=(-1)^n|A|\cdot(x^TA^{-1}x)$$

~~所以当n为~~ 设 $x\in\mathbb{R}^n$ 非0，由 A^{-1} 正定知 $x^TA^{-1}x>0$.

所以当 n 为偶数时 $f(x_1,\cdots,x_n)=|A|\cdot(x^TA^{-1}x)>0$ 故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定

当 n 为奇数时 $f(x_1,\cdots,x_n)=-|A|\cdot(x^TA^{-1}x)<0$ 故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 负定.□

(3) 平面上不平行于某一向量的全体向量所组成的集合，对于向量的加法与数乘

解：不是．设 α 为一固定向量，β 不平行于 α，则 $-\beta+\alpha$ 也不平行于 α，但 $\beta+(-\beta+\alpha)=\alpha$ 平行于 α □

(4) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数乘：$k\alpha=0$ $(k\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R}^2)$

解：不是．因为 $1\alpha=0\neq\alpha$． □

2. 设 $V=\{x\mid x=c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt,\ c_k\in\mathbb{R},\ 0\le t\le 2\pi\}$．

V中元素对于通常三角多项式的加法和数乘运算，是否构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间？

若V是 $\mathbb{R}$ 上线性空间，证明 $\{\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt\}$ 是V的一组基，试提出确定 c_k 的方法．

解：V中元素对于通常多项式的加法和数乘运算，构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间．证明略．

下证 $\{\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt\}$ 是V的一组基．

因为V中元素都是这些函数的线性组合，所以只需证明它们线性无关即可．

~~假设 $c_1\sin t+c_2\sin 2t+\cdots+c_n\sin nt=0$~~．

这事实上是个内积空间，$\sin t,\sin 2t,\cdots,\sin nt$ 正交．需一点内积空间知识 □

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中有两组基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}5\\3\\2\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}6\\6\\1\\3\end{pmatrix}$

$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$

(1) 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵

(2) 求对两组基有相同坐标的非0向量．

解：(1) 易见 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$

故由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$

(2) 设~~非零~~向量 α 对两组基有相同的坐标 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$．

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 即 $\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$

由 $\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&2&-2&0\\0&1&6&7\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&5&6\\0&1&-1&0\\0&0&7&7\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4+4r_3\\r_1-5r_3\\r_2+r_3}]{\frac{1}{7}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

得通解 $\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故对两组基有相同坐标的向量均形如 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mu\\-\mu\\-\mu\\\mu\end{pmatrix}$，$\mu\in\mathbb{R}$

其中非0向量为 $\begin{pmatrix}-\mu\\-\mu\\-\mu\\\mu\end{pmatrix}$，$\mu\neq0$． □

4. 设四维线性空间 V 的两组基Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 满足 $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3\\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4\\ \beta_1+2\beta_2=\alpha_3\\ \beta_2+2\beta_3=\alpha_4\end{cases}$

(1) 求由基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵

(2) 求向量 $\alpha=2\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4$ 在基Ⅰ下的坐标

(3) 判断是否有非0元素 $\alpha\in V$ 使得 α 在基Ⅰ和基Ⅱ下坐标相同.

解：(1) 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 之间关系可知

$$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_4=\alpha_2+2\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_4-2\beta_3=\alpha_4-2(\alpha_1+2\alpha_2)=-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\alpha_3-2\beta_2=\alpha_3-2(-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4)=4\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}4\\8\\1\\-2\end{pmatrix}$$

~~$\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}(-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4)=-\alpha_1-2\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}-1\\-2\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$~~

故有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$ 即由基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\alpha=2\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4$ ~~$=2(-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4)-(-\alpha_1-2\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{2}\alpha_4)$~~

$=2(4\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4)-(-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4)+(\alpha_1+2\alpha_2)+(\alpha_2+2\alpha_3)$

$=11\alpha_1+23\alpha_2+4\alpha_3-5\alpha_4$

所以 α 在基Ⅰ下的坐标为 $\begin{pmatrix}11\\23\\4\\-5\end{pmatrix}$

(3) 设元素 α 在基Ⅰ下和基Ⅱ下坐标均为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$. 则 $x=Px$ 即 $(P-E)x=0$

由 $P-E=\begin{pmatrix}3&-2&1&0\\8&-5&2&1\\0&0&-1&2\\-2&1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_4]{r_1+r_4}$ ~~$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\8&-5&2&1\\-2&1&0&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-8r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&3&-6&9\\0&-1&2&\end{pmatrix}$~~

$\xrightarrow{r_1+r_4}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\8&-5&2&1\\0&0&-1&2\\-2&1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+2r_1]{r_2-8r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&3&-6&9\\0&0&-1&2\\0&-1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&3&-6&9\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $r(P-E)=3<$ 未知数个数

所以 $(P-E)x=0$ 有非0解，即有非0元素在基Ⅰ和基Ⅱ下坐标相同. □

5. V 表示在 $[0,1]$ 上有定义的所有实函数构成的线性空间，下列哪些实函数集合构成 V 的子空间.

(1) 所有 $f(x)$ 使 $f(x)=0$　　(2) 所有 $f(x)$ 使 $f(x)=f(1-x)$

(3) 所有 $f(x)$ 使 $2f(0)=f(1)$　　(4) 所有 $f(x)$ 使当 $0\le x\le 1$ 时恒有 $f(x)\ge 0$

解：看是否是子空间只需看是否对加法和数乘封闭.

(1) 构成子空间，因为若 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 则 $(f+g)(x)=0$，且若 $f(x)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则 $(\lambda f)(x)=0$

「零子空间」

(2) 构成子空间，因为若 $f(x)=f(1-x)$, $g(x)=g(1-x)$, 则 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(1-x)+g(1-x)=(f+g)(1-x)$

若 $f(x)=f(1-x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则 $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda f(1-x)=(\lambda f)(1-x)$.

即该子集对加法和数乘都封闭.

(3) 构成子空间，因为若 $2f(0)=f(1)$, $2g(0)=g(1)$, 则 $2(f+g)(0)=2(f(0)+g(0))=2f(0)+2g(0)=f(1)+g(1)=(f+g)(1)$

若 $2f(0)=f(1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则 $2(\lambda f)(0)=2(\lambda f(0))=\lambda(2f(0))=\lambda f(1)=(\lambda f)(1)$.

(4) 不构成子空间，因为对数乘不封闭：$f(x)=1$ 在此集合内，但 $-f$ 不在. □

6. 假定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，试求由

$$\alpha_1'=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3,\quad \alpha_2'=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3,\quad \alpha_3'=4\alpha_1+13\alpha_2$$

生成的子空间 $\mathrm{span}(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ 的基.

解：设 $\lambda_1\alpha_1'+\lambda_2\alpha_2'+\lambda_3\alpha_3'=0$，则 $(\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3)\alpha_1+(-2\lambda_1+3\lambda_2+13\lambda_3)\alpha_2+(3\lambda_1+2\lambda_2)\alpha_3=0$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 所以 $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0\\-2\lambda_1+3\lambda_2+13\lambda_3=0\\3\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases}$

由 $\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&3&13\\3&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&7&21\\0&-4&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&-4&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+4r_2]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\-3t\\t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

因此有 $2\alpha_1'-3\alpha_2'+\alpha_3'=0$ 即 $\alpha_3'=-2\alpha_1'+3\alpha_2'$

因此 $\mathrm{span}(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ 中任一向量均可由 α_1',α_2' 线性表示

又 α_1',α_2' 不成比例 故线性无关. 因此 α_1',α_2' 是 $\mathrm{span}(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ 的一组基 □

7. 设 V_1 和 V_2 都是线性空间 V 的有限维子空间，且 $V_1\subset V_2$，证明：如果 $\dim V_1=\dim V_2$，则 $V_1=V_2$

~~证明：令 $n=\dim V_1=\dim V_2$. 取 V_1 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，断言：它也是 V_2 的一组基. 作为推论，有 $V_1=V_2$.~~

~~下证断言. 假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不是 V_2 的一组基，则 $\exists\beta\in V_2$~~ 则 $V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$. 假设 $V_1\subsetneq V_2$,

~~则 $\exists\beta\in V_2$ s.t. β 不能写成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合. 又因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性无关~~

~~「参考例 2.7.8」~~

~~取设 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V_2 的一组基~~

证明：设 $n=\dim V_1=\dim V_2$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V_1 的一组基，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V_2 的一组基.

由 $V_1\subset V_2$ 知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性表示，即 $\exists\, P=(p_{ij})_{n\times n}$ s.t. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)P$

断言：P 可逆. 否则，$\exists$ ~~x≠0~~ $x\in K^n$ $x\neq 0$ s.t. $Px=0$，于是 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)x=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Px=0$

于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V_1 的基矛盾 □.

8. 证明：所有n阶方阵空间是线性子空间 L_1 和 L_2 的直和，其中 L_1 是对称方阵子空间，L_2 是反对称方阵子空间.

证明：记 n阶方阵空间为 $M_{n\times n}(K)$.

$\forall A\in M_{n\times n}(K)$，有 $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

由于 $\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T=\frac{(A+A^T)^T}{2}=\frac{A+A^T}{2}$ 所以 $\frac{A+A^T}{2}\in L_1$

由于 $\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T=\frac{(A-A^T)^T}{2}=\frac{A^T-A}{2}=-\frac{A-A^T}{2}$ 所以 $\frac{A-A^T}{2}\in L_2$

因此有 $M_{n\times n}(K)=L_1+L_2$

要证 $M_{n\times n}(K)=L_1\oplus L_2$ 只需证 $L_1\cap L_2=\{0\}$ 即可

设 $A\in L_1\cap L_2$ 则 $A=A^T$ 且 $A=-A^T$ 所以 $A=0$. 因此 $L_1\cap L_2=\{0\}$. □

9. 求由向量 ξ_i 生成的子空间与由向量 η_i 生成的子空间的交与和的基及维数，

其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$，~~及~~ $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\-6\\-5\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\\3\end{pmatrix}$

解：记 $L_1=\mathrm{span}\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$，$L_2=\mathrm{span}\{\eta_1,\eta_2\}$.

设 $v\in L_1\cap L_2$ 则 $\exists\,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ s.t. $x=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3=\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2$

即 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\-\mu_1\\-\mu_2\end{pmatrix}=0$

由 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\2&1&0&5&2\\-1&1&1&-6&-7\\-2&1&-1&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4+2r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\0&-5&2&1&4\\0&4&0&-4&-8\\0&5&-3&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{\frac{1}{4}r_3}\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\0&-5&2&1&4\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&0&5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&3&-1&2&-1\\0&1&0&-1&-2\\0&-5&2&1&4\\0&0&-1&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+5r_2]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&5&5\\0&1&0&-1&-2\\0&0&2&-4&-6\\0&0&-1&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&5&5\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&-2&-3\\0&0&-1&0&5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&-2&-3\\0&0&0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-3r_4\\r_2+r_4\\r_3-2r_4}]{-\frac{1}{2}r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

得通解 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\-\mu_1\\-\mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\\5\\1\\1\end{pmatrix}t$，$t\in\mathbb{R}$

因此有 $L_1\cap L_2=\{t(-5\xi_1+3\xi_2+5\xi_3)\mid t\in\mathbb{R}\}=\{t(\eta_1+\eta_2)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

故 $L_1\cap L_2$ 的一组基为 $-5\xi_1+3\xi_2+5\xi_3=(\eta_1+\eta_2)=\begin{pmatrix}-1\\-7\\13\\2\end{pmatrix}$，维数为1.

而 $L_1+L_2=\text{span}\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\eta_1,\eta_2\}$.

由上述初等行变换过程可知 ξ_1,ξ_2,ξ_3,η_1 线性无关，而 $\eta_2=5\xi_1-3\xi_2-5\xi_3-\eta_1$

因此 L_1+L_2 的一组基为 ξ_1,ξ_2,ξ_3,η_1，维数为4. □

10. 下列映射是不是线性的？为什么？哪些是单射？哪些是满射？

(1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$T(x,y,z)=(x+y,2z,x)$

(2) 在 $M_{n\times n}$ 中，设 M 为一固定 n 阶方阵，定义 T：$T(A)=MA$

(3) 将复数域 $\mathbb{C}$ 视为实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间，定义 T：$T(z)=\bar{z}$，$\bar{z}$ 是 z 复共轭.

(4) 在(3)中，视 $\mathbb{C}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，T 仍如(3)中定义

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$T(x,y,z)=(x^2,x+y,z)$

解：(1) T 是线性映射：$T(\lambda(x,y,z)+\lambda'(x',y',z'))=T(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y',\lambda z+\lambda'z')$

$=(\lambda x+\lambda'x'+\lambda y+\lambda'y',\ 2(\lambda z+\lambda'z'),\ \lambda x+\lambda'x')$

$=\lambda(x+y,2z,x)+\lambda'(x'+y',2z',x')$

T 是单射：设 $T(x,y,z)=0$，则 $x+y=0$，$2z=0$，$x=0$ 即 $x=y=z=0$.

T 是满射：$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，有 $T(z,x-z,\frac{y}{2})=(z+(x-z),2\times\frac{y}{2},z)=(x,y,z)$.

(2) T 是线性映射：$T(\lambda A+\lambda'A')=M(\lambda A+\lambda'A')=M(\lambda A)+M(\lambda'A')=\lambda MA+\lambda'MA'=\lambda T(A)+\lambda'T(A')$

一般来说，T 既不是单射，又不是满射.

有 T 是单射 $\Leftrightarrow$ M 可逆 $\Leftrightarrow$ T 是满射.

设 M 可逆，则 $MA=0$ 蕴含 $A=0$，即 T 是单射，且 $\forall A\in M_{n\times n}$，$T(M^{-1}A)=MM^{-1}A=A$，故 T 为满射.

设 T 为单射，则 $MA=0$ 蕴含 $A=0$，特别地，$Mx=0$ 无非0解，因此 M 可逆.

设 T 为满射，则 $\exists N\in M_{n\times n}$ s.t. $T(N)=MN=E_n$，因此 M 可逆.

(3) T是线性映射: $\forall \lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$, ~~$z=a+b\sqrt{-1}$, $z'=a'+b'\sqrt{-1}$~~ $z,z'\in\mathbb{C}$

有 $T(\lambda z+\lambda' z')=\overline{\lambda z+\lambda' z'}=\overline{\lambda z}+\overline{\lambda' z'}=\lambda\bar{z}+\lambda'\bar{z'}=\lambda T(z)+\lambda' T(z')$

T是单射: 设 $T(z)=0$, 即 $\bar{z}=0$, 则 $z=0$

T是满射: $\forall z\in\mathbb{C}$ 有 $T(\bar{z})=\bar{\bar{z}}=z$.

(4) T不是线性映射: 对 $\lambda=\sqrt{-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 有 $T(\lambda z)=\overline{\lambda z}=-\sqrt{-1}\,\bar{z}=-\lambda\bar{z}=-\lambda T(z)\neq\lambda T(z)$

(5) T不是线性映射: 对 $\lambda\neq 0,1$, $x\neq 0$, 有 ~~$T(x,0,0)=(x^2$~~, $T(\lambda(x,0,0))=T(\lambda x,0,0)=(\lambda^2x^2,0,0)$

$=\lambda^2(x^2,0,0)=\lambda^2T(x,0,0)\neq\lambda T(x,0,0)$ □

11. 设T是V的一个线性变换, 如果 $T^{k-1}\alpha\neq 0$, 但 $T^k\alpha=0$

(1) 证明: $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{k-1}\alpha$ $(k\geq 1)$ 线性无关.

(2) 设 $W(\alpha)=\mathrm{span}\{\alpha, T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha\}$, 将T看成 $W(\alpha)$ 中线性变换, 试求T在基 $\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha$ 下的矩阵.

(1) 证明: 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2T\alpha+\cdots+\lambda_kT^{k-1}\alpha=0$ (*) ~~对任意 $1\leq i\leq k-1$ 在上式两边作用 T^i~~

~~由 $T^k\alpha=0$ 可知 有 $\lambda_1T^i\alpha+\cdots+\lambda_{k-i}T^{k-1}\alpha=0$~~

用数学归纳法证明 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$.

当 $n=1$ 时, 在(*)两边作用 T^{k-1} 得 $\lambda_1T^{k-1}\alpha+\lambda_2T^k\alpha+\cdots+\lambda_kT^{2k-2}\alpha=0$

因为 $T^k\alpha=0$ 所以 $\lambda_1T^{k-1}\alpha=0$ 又 $T^{k-1}\alpha\neq 0$, 所以 $\lambda_1=0$

假设 $\lambda_1=\cdots=\lambda_i=0$ (对 $1\leq i\leq k-1$ 成立). 下证 $\lambda_{i+1}=0$

在(*)两边作用 T^{k-i-1} 得 $\lambda_1T^{k-i-1}\alpha+\cdots+\lambda_iT^{k-2}\alpha+\lambda_{i+1}T^{k-1}\alpha=0$

由归纳假设有 $\lambda_{i+1}T^{k-1}\alpha=0$ 因此 $\lambda_{i+1}=0$

综上可知 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$ 所以 $\alpha, T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha$ 线性无关 □

(2) 解: 因为 $T(\alpha)=T\alpha$, $\cdots$, $T(T^i\alpha)=T^{i+1}\alpha$ $(0\leq i\leq k-2)$, $\cdots$, $T(T^{k-2}\alpha)=T^{k-1}\alpha$, $T(T^{k-1}\alpha)=T^k\alpha=0$

所以T在基 $\alpha, T\alpha,\cdots,T^{k-1}\alpha$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ □

12. 设 $\mathbb{R}$ 上三维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

(1) 求 T 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵.

(2) 求 T 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵，其中 $k\in\mathbb{R}, k\neq 0$

(3) 求 T 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解：(1) 从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 的过渡矩阵为 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其逆 $P_1^{-1}=P_1$

所以 T 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵为

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(2) 从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 $P_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，其逆 $P_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

所以 T 在基 $\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$P_2^{-1}AP_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ k^{-1}a_{21} & a_{22} & k^{-1}a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) 从基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 $P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其逆为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以 T 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$P_3^{-1}AP_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ □

13. 设三维线性空间 V 的两组基为 Ⅰ：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$，Ⅱ：$\eta_1, \eta_2, \eta_3$.

由基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

线性变换 T 满足 $\begin{cases} T(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\eta_1+\eta_2 \\ T(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3)=\eta_2+\eta_3 \\ T(\varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3)=\eta_1+\eta_3 \end{cases}$

(1) 求 T 在基Ⅱ下的矩阵 A

(2) 求 $T(\eta_1)$ 在基Ⅱ下的坐标.

~~因为 $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{vmatrix}=1$ 所以 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3$ 是一组基~~

解：(1) 从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\3&2&4\end{pmatrix}$

所以从 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-6&5\\1&1&-1\\1&4&-3\end{pmatrix}$

到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为 $B^{-1}C=\begin{pmatrix}-2&-6&5\\1&1&-1\\1&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&6&3\\2&-1&0\\4&-4&-2\end{pmatrix}$

从 η_1,η_2,η_3 到 $\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 $C^{-1}B=(B^{-1}C)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&0&3\\4&2&6\\-4&-4&-5\end{pmatrix}$

所以 $T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=T(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3,\ \varepsilon_1+3\varepsilon_2+4\varepsilon_3)C^{-1}B$

$=(\eta_1+\eta_2,\ \eta_2+\eta_3,\ \eta_1+\eta_3)C^{-1}B$

$=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-\frac{3}{2}\\-2&-1&-3\\2&2&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

$=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&-1&-\frac{9}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

所以 T 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&-1&-\frac{9}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

~~由题意知 $\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\ \eta_2=-\varepsilon_2$. 由~~

(2) 由 (1) 知 $T(\eta_1)=\eta_1-3\eta_2=(\varepsilon_1-\varepsilon_3)-3(-\varepsilon_2)=\varepsilon_1+3\varepsilon_2$

因此 $T(\eta_1)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ □

14. 设 T 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换.

证明：T 在任一组基下的矩阵都相同 $\Leftrightarrow$ T 是数乘变换

证明："$\Leftarrow$" $\lambda\in K$ 对应的数乘变换在任一组基下的矩阵都是 $\begin{pmatrix}\lambda&&\\&\ddots&\\&&\lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$

"$\Rightarrow$" 设 T 在任一组基下的矩阵都相同，为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

则 $\forall$ n 阶可逆阵 P 都有 $P^{-1}AP=A$

取 $\mu\in K\setminus\{0\}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$，$P=E(i(\mu))$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,i-1}&\mu a_{1i}&a_{1,i+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&&&\\ a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,i-1}&\mu a_{i-1,i}&a_{i-1,i+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\ \mu^{-1}a_{i1}&\cdots&\mu^{-1}a_{i,i-1}&a_{ii}&\mu^{-1}a_{i,i+1}&\cdots&\mu^{-1}a_{in}\\ a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,i-1}&\mu a_{i+1,i}&a_{i+1,i+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&&&&&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,i-1}&\mu a_{n,i}&a_{n,i+1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,i-1}&a_{1,i}&a_{1,i+1}&\cdots&a\\ \vdots&&\vdots&&&&\\ a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,i-1}&a_{i-1,i}&a_{i-1,i+1}&\cdots&a\\ a_{i,1}&\cdots&a_{i,i-1}&a_{i,i}&a_{i,i+1}&\cdots&a\\ a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,i-1}&a_{i+1,i}&a_{i+1,i+1}&\cdots&a\\ \vdots&&&&&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,i-1}&a_{n,i}&a_{n,i+1}&\cdots&a\end{pmatrix}$$

于是 $\forall j\neq i$ 有 $\mu^{-1}a_{ij}=a_{ij}$，$\mu a_{ji}=a_{ji}$ 因此 $a_{ij}=0=a_{ji}$ $\forall j\neq i$

由于 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 任意，所以 $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\&\ddots&\\&&a_{nn}\end{pmatrix}$ 为对角阵

现任意取 $1\le i<j\le n$，$P=E(i,j)$. 则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & & & \\ & a_{i-1,i-1} & & & & & & & \\ & & a_{jj} & & & & & & \\ & & & a_{i+1,i+1} & & & & & \\ & & & & a_{j-1,j-1} & & & & \\ & & & & & a_{ii} & & & \\ & & & & & & a_{j+1,j+1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & & & \\ & a_{i-1,i-1} & & & & & & & \\ & & a_{ii} & & & & & & \\ & & & a_{i+1,i+1} & & & & & \\ & & & & a_{j-1,j-1} & & & & \\ & & & & & a_{jj} & & & \\ & & & & & & a_{j+1,j+1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因此 $a_{ii}=a_{jj}$ 故 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$ 记此数为 λ

~~所以~~则 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$ 为数量阵.

现固定 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则有 $T(\alpha_1)=\lambda\alpha_1,\cdots,T(\alpha_n)=\lambda\alpha_n$

$\forall\alpha\in V$，有 $x_1,\cdots,x_n$ s.t. $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ 因此 $T(\alpha)=x_1T(\alpha_1)+\cdots+x_nT(\alpha_n)$

$=\lambda x_1\alpha_1+\cdots+\lambda x_n\alpha_n=\lambda\alpha$

因此 T 为数量变换 □

15. 在线性空间 V 中，定义线性变换 T 为 $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1-2x_2+2x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

求 T 的所有特征值和特征向量.

解：因为 $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以 T 在自然基 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

下求 A 的特征值与特征向量.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-2\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ 得 A 的特征值为 $\lambda=-1$ 和 $\lambda=1$（2重）

对 $\lambda=-1$，解 $(-E-A)x=0$

由 $\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得一基础解系 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 A 的属于 -1 的所有特征向量为 $\begin{pmatrix}t_1\\0\\0\end{pmatrix}$，$t_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

> $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
> 所以 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 是 T 的属于特征值 -1 的特征向量.

对 $\lambda=1$，解 $(E-A)x=0$

由 $\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得一基础解系 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

~~故 A 的属于 1 的所有特征向量为~~ $t_2\alpha_2+t_3\alpha_3=\begin{pmatrix}-t_2+t_3\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$，$t_2,t_3\in\mathbb{R}$ 不全为 0.

所以 T 的所有特征值为 $\lambda=-1$, $\lambda=1$ (2重)

T的属于-1的所有特征向量为 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}t_1\\0\\0\end{pmatrix} = t_1 e_1 = \begin{pmatrix}t_1\\0\\0\end{pmatrix}$, $t_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

T的属于1的所有特征向量为 $(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}-t_2+t_3\\t_2\\t_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t_2+t_3\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$, $t_2,t_3\in\mathbb{R}$ 不全为0 □

16. 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}$, 定义 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性映射 T 为 $Tx=Ax$, $\forall x\in\mathbb{R}^4$

试分别求出像空间 $Im(T)$ 与核空间 $ker(T)$ 的一组基.

解: 设A的列向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 即 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

则 $Im(T)=\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^4\} = \{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4 \mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^4\}$

$= span\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$.

$ker(T)=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid Ax=0\}$ 为方程组 $Ax=0$ 的解空间.

对A做初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, 即为 $ker(T)$ 的一组基

并且, α_1,α_3 线性无关, $\alpha_2=-\alpha_1$, $\alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2$

因此 ~~Im(T)~~ α_1,α_3 是 $Im(T)$ 的一组基 □

17. 已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间V的一组基, V上的线性变换T在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$

(1) 求T在基 $\varepsilon_1'=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $\varepsilon_2'=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-3\varepsilon_4$, $\varepsilon_3'=\varepsilon_3+\varepsilon_4$, $\varepsilon_4'=2\varepsilon_4$ 下的矩阵

(2) 求T的像空间与核空间

(3) 在T的核空间中选一组基, 把它扩充成V的一组基, 并求T在这组基下的矩阵

(4) 在T的像空间中选一组基, 把它扩充成V的一组基, 并求T在这组基下的矩阵.

解: (1) 从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4'$ 下的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-3&1&2\end{pmatrix}$

由 $(P,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\-2&3&0&0&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&0&1&0\\1&-3&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2+2r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&2&1&0&0\\0&-1&1&0&0&0&1&0\\0&-3&1&2&-1&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&-1&1&0&0&0&1&0\\0&-3&1&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\0&0&1&2&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\0&0&0&2&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\0&0&0&1&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

所以 T 在 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3',\varepsilon_4'$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5&3&2\\-2&-4&4&6\\2&-14&10&10\\4&-1&-1&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-5&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{14}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{56}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{13}{3}&-\frac{4}{3}&-\frac{14}{3}\end{pmatrix}.$$

(2) 对A做初等行变换

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&2&3&4\\0&-2&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

得映射 $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\ x\mapsto Ax$ 的像空间为 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$

核空间为 $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

因此 T 的像空间为 $\mathrm{span}\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}0\\2\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$

$=\mathrm{span}\{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-2\varepsilon_4\}$.

核空间为 $\mathrm{span}\left\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix},(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$=\mathrm{span}\{-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4\}$.

(3) 取核空间的一组基 $-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$

因为 $\begin{vmatrix}-2&-1&1&0\\-\frac{3}{2}&-2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+c_1+2c_4]{c_1+2c_3+\frac{3}{2}c_4}\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$

所以 $-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ 线性无关，是V的一组基.

从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到该基的过渡矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}-2&-1&1&0\\-\frac{3}{2}&-2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

由 $(Q,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}-2&-1&1&0&1&0&0&0\\-\frac{3}{2}&-2&0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+\frac{3}{2}r_3+2r_4]{r_1+2r_3+r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&1&0&1&0&2&1\\0&0&0&1&0&1&\frac{3}{2}&2\\1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0&2&1\\0&0&0&1&0&1&\frac{3}{2}&2\end{array}\right)$ 得 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\end{pmatrix}$

故T在基 $-2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ -\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1&1&0\\-\frac{3}{2}&-2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&1&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&-2\\0&0&5&2\\0&0&\frac{9}{2}&1\end{pmatrix}$$

(4) 取T的像空间的一组基 $\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4$

因为 $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&1&1&0\\2&-2&0&1\end{vmatrix}=2\neq0$ 所以 $\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$ 线性无关

是V的一组基.

从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到该基的过渡矩阵为 $R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&1&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}$

由 $(R,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\-1&2&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\2&-2&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&0&1&0\\0&-2&0&1&-2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&1&0&-1&0&1&0\\0&-2&0&1&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$ 得 $R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$

故T在基 $\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,\ 2\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&1&1&0\\2&-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&2&1\\4&-1&1&3\\14&-1&5&5\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&0&2&1\\\frac{9}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&2\\\frac{9}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

□