

《简明微积分》期中试卷 (2016. 11. 12)

姓名 _____ 系别 _____ 学号 _____

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一. 填空题 (7分 × 4 = 28分)

1. 函数 $y = \ln x + \arctan x + \arcsin 2x$ 的定义域为 _____ . 函数 $y = \sqrt{5-x^2}$ 的值域为 _____ .

2. 函数 $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $\ln \frac{2-x}{2+x}$, $\frac{x}{1+x^2}$ 及 $\frac{\cos x}{1+x^2}$ 中, _____ 为偶函数, _____ 为有界函数.

3. 设数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} + \frac{\arccos x}{\sqrt{n}}$, $y_n = n^2 \sin \frac{2}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$ _____.

4. 当 $x \rightarrow 0$, $x(e^x - 1)$ 与 $x \sin 2x$ 是 _____ 无穷小, $x^2 \arcsin x$ 较 $\ln(1+x^2)$ 是 _____ 无穷小.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \tan x, & x > 0, \\ (1+x)^{-\frac{1}{x}} e^{x+1}, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(0+) =$ _____, $f(0-) =$ _____,

$x=0$ 是 $f(x)$ 的 _____ 间断点. $x=1$ 是函数 $\arctan \frac{1}{x-1}$ 的 _____ 间断点.

6. 曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____, 法线方程为 _____.

7. 设函数 $f(1) = 0$ 且 $f'(1) = 4$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1-\Delta x)}{\Delta x} =$ _____.

二. 求极限 (6分 × 4 = 24分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{2(n^2+n)}}{2n^2+5} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \cos 3x}{x + \operatorname{arccot} x} + e^{-x} \sin x \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} + x^2 \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right]$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1} \right)^x$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^3 + 3x^2} + \frac{11 \cos 4x}{6e^x} + x \sin \frac{1}{x} \right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$.

三. 求导数 (5分 × 6 = 30分)

1. $y = \sqrt{x^2+1} + \tan(2x^2)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

2. $y = (\arcsin 3x)(x^2+1) \cot 2x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. $y = \ln \ln \ln(x^2 + 1) - \sqrt{3x + 1}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

4. $y = \sqrt{\tan \ln x} + \arctan \frac{2x}{1 - x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

5. $y = (\sin 2x)^{\cos x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

6. $y = \left(\sin e^{\frac{1}{x}}\right)^2$. 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$.

四、 (6分).

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1 - \cos x}{x}, & x < 0, \end{cases} \text{ 求导函数 } f'(x).$$

五、 (5分). 证明: 方程 $x - 2 \sin x = 0$ 在开区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有根.

六、 (7分). 设 $y = e^{2x} + \arctan x + x^2 \sin 5$, 求 y' , y'' , y''' , $y'''(0)$.