

# 《简明微积分》期中试卷 2015. 11. 14

姓名 \_\_\_\_\_ 系别 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

## 一、填空题(7分× 4=28分)

1. 函数  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} + \arcsin \frac{x}{2}$  的定义域为 \_\_\_\_\_. 函数  $y = \sin(\arctan x)$  的值域为 \_\_\_\_\_.

2. 函数  $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\frac{x \sin x}{x^2 + 1}$ ,  $5 + \cos x$  及  $x^3 + \sin x$  中, \_\_\_\_\_ 为奇函数, \_\_\_\_\_ 为有界函数.

3. 设数列  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} + \frac{\operatorname{arccot} n^2}{2n + 7}$ ,  $y_n = n \sin \frac{5}{n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$  \_\_\_\_\_,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$  \_\_\_\_\_.

4. 当  $x \rightarrow 0$ ,  $x \tan^2 x$  较  $x \ln(1+x)$  是 \_\_\_\_\_ 无穷小,  $\sin x$  与  $ex(1-x)^{\frac{1}{x}}$  是 \_\_\_\_\_ 无穷小.

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{2x} + \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x > 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{2x}}, & x < 0 \end{cases}$ , 则  $f(0+) =$  \_\_\_\_\_,  $f(0-) =$  \_\_\_\_\_,  $x = 0$  是  $f(x)$  的 \_\_\_\_\_ 间断点.  $x = 1$  是函数  $(x-1) \sin x \cos \frac{1}{x-1}$  的 \_\_\_\_\_ 间断点.

6. 曲线  $y = \ln(x-1)$  在点  $(2,0)$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_, 法线方程为 \_\_\_\_\_.

7. 设函数  $f(0) = 0$  且  $f'(0) = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x(x + \cos x)} =$  \_\_\_\_\_.

## 二、求极限(6分× 4=24分).

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \right)$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{3x} - e^x}{2x} + \frac{\sin \sqrt{5x}}{\sqrt{x}} \right)$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x - \arcsin 3x}{x + \arctan x} + \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \right]$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1} + e^{-x} \ln(1+e^x) \right]$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-1} \right)^{3x}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{x^2+3} + e^{-1}e^x + \cos \pi x \right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$ .

## 三、求导数(5分× 6=30分).

1.  $y = (x+1)(x^2-1)(3x+2) + \tan(3x^2)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

2.  $y = (1 + \sin x)^{\cos x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

3.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \cot \sqrt{2x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

4.  $y = \ln \ln(x^2 + 1) - \sqrt{x + \sqrt{3x + 1}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

5.  $y = \arccos x^2 + \arctan \frac{2x}{1 - x^2}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

6.  $y = e^{\sqrt{1 - \sin 2x}} + \sqrt[3]{1 + \sin^2 x}$ . 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ ,  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$ .

四、 (6分).

设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \ln(1 + 3x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ (\arctan x)^2 + 3e^x - 3, & x < 0, \end{cases}$  求导函数  $f'(x)$ .

五、 (6分). 证明方程  $x(x^2 - 1) \arctan(x^2 + 5) + \pi \sin \frac{\pi}{2}x = 3$  有正根.

六、 (6分). 设  $y = \ln(1 + x) + 5^x + x \cos 3 + e^2$ , 求  $y'$ ,  $y''$ ,  $y^{(n)}$ ,  $y^{(n)}(1)$  ( $n \geq 3$ ).