南京大学简明微积分2014 级期中试卷(2014.11.22)

姓名____________ 系别____________ 学号______________

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一、 填空题($4'\times 5=20'$)

1. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ 的定义域是 _______; 函数 $y=2\arctan x$ 的值域是 _________.

2. 当 $x\to 0$ 时, $x\ln(1+x)$ 较 $\sin x$ 是 ________ 无穷小; 当 $x\to 1$ 时, $\dfrac{1}{2}(x-1)$ 与 $\sqrt{x}-1$ 是 ________ 无穷小.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x+\dfrac{x^2-3x+1}{x^3+2}\left(5+\cos(x+1)\sin x+\arcsin\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}}, & x>0,\\ e^x, & x<0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 _______ 间断点; $x=2$ 是函数 $(x-2)\sin\dfrac{1}{x-2}$ 的 _______ 间断点.

5. 函数 $y=|2x|$ 在点 $x=$_______ 不可导; 设函数 $f(1)=0$ 且 $f'(1)=3$, 则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{3(x-1)}=$ _______; $dy|_{x=1}=$_______.

二、 求极限($4'\times 6=24'$).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{2}{n^3+2}+...+\dfrac{n}{n^3+n})$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^x+x\sin\dfrac{1}{x}+\operatorname{arccot}2x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}(5+\cos 5x)^{\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x(\arcsin x)^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x-1}$.

三、 求导数与微分($6'\times 4=24'$).

1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arctan 3x+\ln(x^2+1)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. $y=(4+\sin x)^{\cos x}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

3. $y=\cos\sqrt{1+x^2}+e^{\sin^2 x}+\tan x$, 求 y'.

4. $y = \dfrac{x-1}{x+1} + x(x^2+5)\operatorname{arccot} x$, 求 y' .

四、$(6')$. 设 $f(x) = \begin{cases} 4+\sin x, & x \le 0, \\ 3+e^x, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$ 以及 $dy|_{x=0}$.

五、$(6')$. 设 $y = xe^x + 5^x + x\ln 2$, 求 y'''.

六、$(5')$ 证明方程 $x + (x^2+x+1)\sin x = 3$ 至少有一个正根.

七、$(8')$.

1. 求曲线 $xy = 1$ 过点 $(1, 1)$ 的切线方程.

2. 证明过曲线 $xy = 1$ 上任一点 (x_0, y_0) $(x_0 > 0)$ 的切线与两坐标轴围成的三角形面积是一个常数.

八、$(7')$

1. 叙述罗尔定理.

2. 试对 $f(x) = \sqrt{x}, x \in [1, 16]$ 写出拉格朗日定理，并求出 ξ 的值.