南京大学数学系数学分析期中试卷

考试时间：2017.11.02 9:00~11:00 任课教师：苗栋、王奕倩

一．计算题（每题15分，共30分）

(1) 设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 由 $x+f(u,y)=0$ 和 $v+g(u,y)=0$ 确定，求偏导数 x_u，x_v，y_u，y_v.

$$v=-g(u,y),\quad (0,1)=\left(\frac{\partial v}{\partial u},\frac{\partial v}{\partial v}\right)=(-g_u,-g_y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix},$$

$$\therefore\ \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{g_u}{g_y},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{g_y}.$$

$$x=-f(u,y),\quad \left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v}\right)=(-f_u,-f_y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$$=\left(-f_u+\frac{f_y g_u}{g_y},\ \frac{f_y}{g_y}\right).\quad \therefore\ \frac{\partial x}{\partial u}=-f_u+\frac{f_y g_u}{g_y},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{f_y}{g_y}.$$

(2) 设 D 是由 $y=\pi-x$，$x=\pi$，$y=\pi$ 围成的区域，求 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy=\int_0^{\pi}\int_{\pi-x}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2.$$

二．（10分）设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

问 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ 是否相等？

$$f_{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x,y)-f(0,y))-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x,0)-f(0,0))\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)}{xy}=-1$$

$$f_{yx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(f(x,y)-f(x,0))-\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(f(0,y)-f(0,0))\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)}{xy}=1$$

不相等.

三．（10分）设函数 $f:\overline{B}_1(0)\to\mathbb{R}$ 连续，在边界上等于0并在 $B_1(0)$ 内部可微，则 f 在球的内部至少存在一个驻点.

当 $f\equiv 0$ 时，内部全都是驻点；

当f不恒为0时，不妨设$\exists x_0\in\overline{B_1(0)}$ s.t. $f(x_0)>0$，由f的连续性$\exists\delta>0$ s.t. 当$x\in B_\delta(x_0)$时$f(x)>0$。而连续函数f在有界闭集$\overline{B_1(0)}$上必取得最大值，由上知最大值不在边界，$\therefore\exists x'\in B_1(0)$ s.t. $f(x')=\max f$，则x'是一个驻点，$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x')=0$，$i=1,2,\cdots,n$。若不然，$\exists i$ s.t. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x')\neq0$，不妨设$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x')>0$，根据$f$可微知$\exists t>0$ s.t. $f(x'+tx_i)>f(x')$ 矛盾。$\therefore x'$是f的一个驻点。

四、(10分) 若m元函数f在原点附近连续可微且$f(0)=0$，证明存在m个函数g_i $i=1,2,\cdots,m$ 使得$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1,\cdots,x_m)$，并且$g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$。

令$g_i(x)=\frac{1}{x_i}\left(f(x_1,\cdots,x_i,0,\cdots,0)-f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,0)\right)$，

则$g_i(x)\cdot x_i=f(x_1,\cdots,x_i,0,\cdots,0)-f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,0)$，

$\sum_{i=1}^m x_i g_i(x)=f(x)-f(0)=f(x)$。

而$\lim\limits_{x\to0}g_i(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x_i}\left(f(x_1,\cdots,x_i,0,\cdots,0)-f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,0)\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}f'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},0,\cdots,0)=f'_{x_i}(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ （用到f连续可微）

五、(10分) 设$f(x,y)$，$g(x,y)$在矩形$I=[a,b]\times[c,d]$上黎曼可积，$\forall(x,y)\in I$，$f(x,y)\leq g(x,y)$，且$\int_I f=\int_I g$。证明：存在零测集$I_0\subset I$ s.t. 对$\forall(x,y)\in I\setminus I_0$有$f(x,y)=g(x,y)$。

若不然，则$\exists I_0\subset I$，$I_0=\{(x,y)\mid f(x,y)<g(x,y)\}$不是零测集，

$\because f,g$均可积，$\therefore f,g$的间断点均为零测集，不妨用A,B来表示，

则在$I_0\setminus(A\cup B)$上由f,g的连续性，$\exists\delta>0$ s.t.

$I_1=\{(x,y)\mid f(x,y)+\delta<g(x,y)\}$也不是零测集，$I_1\subset I_0$，对$I$上的任一分割$\pi$，$\exists I_1,I_2,\cdots I_k\in\cup I_{ij}$ s.t. $\sum_{i=1}^k V(I_i)>\varepsilon_0$，$\exists\xi_i\in I_i$ s.t.

$g(\xi_i)-f(\xi_i)>\delta$, $i=1,2,\cdots,k$. $f(x,y)\le g(x,y)$.

$\therefore \left|\sum_{i,j} g(\xi_{ij})V(I_{ij})-\sum_{i,j} f(\xi_{ij})V(I_{ij})\right|\ge\left|\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)V(I_i)-\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)V(I_i)\right|$

$\ge\delta\varepsilon_0>0$. $\therefore$ $\forall$分割π下 $\left|\sum_{i,j} g(\xi_{ij})V(I_{ij})-\sum_{i,j} f(\xi_{ij})V(I_{ij})\right|\ge\delta\varepsilon_0>0$

$\therefore \int_I f>\int_I g$，矛盾，证毕.

六.(10分) 设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx$，$G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，求F在曲面$G^{-1}(1)$上的极小值.

设 $F(x,y,z,\lambda)=xy+yz+zx-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$F_x=y+z-2\lambda x$，$F_y=x+z-2\lambda y$，$F_z=y+x-2\lambda z$，

$F_x=F_y=F_z=0$，$\therefore$ $\frac{y+z}{x}=\frac{x+y}{z}=\frac{z+x}{y}=2\lambda=-1$或$2$，$\lambda=-\frac{1}{2}$或$1$.

其中当$\lambda=-\frac{1}{2}$时，$x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$.

$F(x,y,z)=\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)=-\frac{1}{2}$. 当$\lambda=1$时，

$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=2+2F(x,y,z)=4\lambda^2=4$，$F(x,y,z)=1$.

$\therefore$ 当$\lambda=-\frac{1}{2}$时 $F(x,y,z)$ 取得极小值$-\frac{1}{2}$.

七.(10分) 证明如下方程有唯一的(Riemann可积)解，并求之.

$$\Phi(x,y)=1+\int_{[0,x]\times[0,y]}\Phi,\quad \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$$

首先定义一个函数类 $L([0,1-\delta]^2)=\{\Phi(x,y):\Phi(x,y)\text{在}[0,1-\delta]^2\text{上可积}\}$

任取$\Phi_0\in L([0,1-\delta]^2)$. 令$\Phi_{i+1}(x,y)=1+\int_{[0,x]\times[0,y]}\Phi_i$，得到

$L([0,1-\delta]^2)$上的一个函数列$\{\Phi_i\}_{i=0}^{\infty}$. $\forall\Phi,\Psi\in L$，令

$\|\Phi-\Psi\|=\sup_{(x,y)\in[0,1-\delta]^2}|\Phi(x,y)-\Psi(x,y)|$，$\|\Phi-\Psi\|<+\infty$.

$\|\Phi_{i+1}-\Phi_i\|=\left|\int_{[0,x]\times[0,y]}\Phi_i-\int_{[0,x]\times[0,y]}\Phi_{i-1}\right|<\sup|\Phi_i(x,y)-\Phi_{i-1}(x,y)|$

$=\|\Phi_i-\Phi_{i-1}\|(1-\delta)^2$. 根据压缩映像原理，$\exists!\,\Phi^*$ s.t.

$\Phi^*=1+\int_{[0,x]\times[0,y]}\Phi^*$，$\Phi^*=\lim_{n\to\infty}\Phi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{(n!)^2}$.

Memo No.
Date / /

八. (10分) $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为 C^1 映射. $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|F(x)\| = \infty$. 且 F 的 Jacobian 矩阵处处非奇异, 证明: $\forall y \in \mathbb{R}^d$. $F^{-1}(y)$ 为非空有界集.

要证 $F^{-1}(y)$ 非空, 即证 F 为满射, $F(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$, 下证 $F(\mathbb{R}^d)$ 既开且闭.

开: 若 $F(P) = Q \in F(\mathbb{R}^d)$, 由 $|JF| \neq 0$, 根据局部的逆映射定理

存在 P 的邻域 U. Q 的邻域 V s.t. $F(U) = V$. $F^{-1}(V) = U$.

$Q \in V \subset F(\mathbb{R}^d)$ $\therefore F(\mathbb{R}^d)$ 为开集.

闭: 令 $F(P_n) = Q_n$. $P_n. Q_n \in \mathbb{R}^d$. $n = 1, 2, \cdots$. $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q^*$, 要证 $Q^* \in F(\mathbb{R}^d)$, 即 $\exists P^* \in \mathbb{R}^d$ s.t. $F(P^*) = Q^*$. 注意到 $\{P_n\}$ 是个有界点集. 若不然, $\exists$ 子列 $\{P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s.t. $\|P_{n_k}\| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, 则 $Q_{n_k} = F(P_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, 矛盾. $\therefore \exists \{P_n\}$ 的子列 $\{P_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ s.t. $\lim\limits_{l\to\infty} P_{n_l} = P^*$. $F(P^*) = Q^*$. $\therefore F(\mathbb{R}^d)$ 为闭集.

由上 $F(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$. $\therefore F^{-1}(y)$ 非空, 而 JF 处处非奇异, 根据局部逆映射定理 $F^{-1}(y)$ 只可以是一些离散的点, 不妨设为 $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

由 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} \|F(P)\| = \infty$ 知 $\{P_k\}_{k=1}^{n}$ 定为有界集.

九. (10分) $D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \le \frac{1}{2}\}$, $F: D \to \mathbb{R}$ 为 C^1 映射. $\|\nabla f(0)\| = 1$. $\|\nabla f(u) - \nabla f(v)\| \le \|u - v\|$, $\forall u. v \in D$. 证明: $\exists! \xi \in D$ s.t. $F(\xi) = \max F$.

首先, ξ 不能位于圆盘 D 的内部. 否则 $\nabla F(\xi) = 0$,

$1 = \|\nabla f(\xi) - \nabla f(0)\| \le \|\xi\| \le \frac{1}{2}$, 矛盾. $\therefore \xi \in \partial D$. (闭圆盘 D 是个有界闭集因此连续函数 F 可以取到最大值). 接下来说明唯一性.

反设 $\exists P_1(x_1, y_1)$. $P_2(x_2, y_2) \in \partial D$. $P_1 \neq P_2$ s.t. $F(P_1) = F(P_2) = \max F$,

对于点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 令 $\Gamma: \{(x, y) \in D \mid F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0\}$

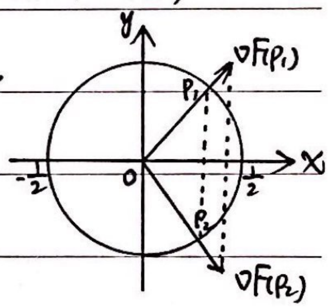
Γ 就是经过点 $F(P_0)$ 的等高线. Γ 在 P_0 处的切线方程为

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.
Date / /

$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)=0$，$\nabla F(P_0)=(F'_x(P_0),F'_y(P_0))$.

因此等高线的切线方向应与梯度方向垂直（p.s. 从几何直观上看，梯度是变化最快的方向，等高线是最平稳的方向）. $P_1,P_2\in\partial D$，P_1,P_2为F的最值点因此经过P_1,P_2的等高线必退化为一个点，不能进入圆盘D的内部，由此，F在P_1,P_2处的梯度方向也就确定了，$\nabla F(P_1)//\overrightarrow{OP_1}$，$\nabla F(P_2)//\overrightarrow{OP_2}$. $\|\nabla F(0)\|-\|\nabla f(P_1)\|\le\|\nabla f(0)-\nabla f(P_1)\|\le\|0-P_1\|=\frac{1}{2}$，$\|\nabla F(0)\|=1$，$\therefore\|\nabla f(P_1)\|\ge\frac{1}{2}$，同理$\|\nabla F(P_2)\|\ge\frac{1}{2}$，注意到第一个等号成立的条件是$\nabla F(0)//\nabla F(P_1)$，亦即$\nabla F(0)//\overrightarrow{OP_1}$，而$P_1\ne P_2$，因此$\|\nabla F(P_1)\|\ge\frac{1}{2}$，$\|\nabla F(P_2)\|\ge\frac{1}{2}$且等号不同时成立，又$P_1,P_2\in D$，这与$\|\nabla F(P_1)-\nabla F(P_2)\|\le\|P_1-P_2\|$矛盾.
$(\|P_1\|=\|P_2\|=\frac{1}{2})$. $\therefore\exists!\,\xi\in D$ s.t. $F(\xi)=\max F$.



这张卷子满分是110，当时考出来的结果嘛……