微积分II（第一层次）期中试卷(2018.5.5)

一、计算下列各题（5分×12 = 60分）

1. 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{\ln(1+x^4+y^4)}$.

2. 设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$, 其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设由方程 $F(xy,\dfrac{z}{y})=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$, 其中 $F(u,v)$ 一阶连续可微且 $F'_u\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 求曲面 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}+3\sqrt{z}=6$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面.

5. 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的所有驻点，并判断是否取得极值.

6. 函数 $f(x,y,z)=xyz+\ln(xyz)$ 在点 $(2,1,1)$ 处沿什么方向的方向导数取得最大值?

7. 交换累次积分 $I_1=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的次序.

8. 求二重积分 $I_2=\displaystyle\iint\limits_D (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$, 求 $I_3=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

10. 求第一类曲线积分 $I_4=\displaystyle\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$,其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ 的右半分支.

11. 求第二类曲线积分 $I_5=\displaystyle\int_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $y=x\tan\beta$ $(0<\beta<\dfrac{\pi}{2})$ 的交线，从 x 轴正向看去是逆时针方向.

12. 证明：$(2x\cos y+y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面上是某个函数的全微分，并求出它的一个原函数.

二、(8分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\ln(1+xy)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、以及可微性，

三、(8分）在椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ $(a>0,b>0)$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域内嵌入一个长方体，且有一面在 $z=1$ 上，求此长方体体积的最大值.

四、(8分）计算积分 $I_6=\displaystyle\iiint\limits_\Omega (y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leq 2x$.

五、(8分）求曲面 $(2x+3y)^2+(2y+3z)^2+(2z+3x)^2=1$ 所围立体体积.

六、(8分）设 D 为两条直线 $y=x,y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1,xy=4$ 所围成的闭区域，$F(u)$ 是连续可微函数，C 是闭区域 D 的边界，取正向. 记 $f(u)=F'(u)$, 证明：

$$I_7=\int_C \frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u.$$

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2019.4.27)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 计算极限 $I_1=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^3}-\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^3}+1}{\tan(x^4+y^4)}$.

2. 设函数 $z=f\big(xy,\ yg(x)\big)$，函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(1,1)}$.

3. 求函数 $u=x^2+\mathrm{e}^{yz}+\sin(z-x)$ 在点 $(1,-2,1)$ 处沿 $\vec{l}=(2,1,1)$ 的方向导数.

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换 $I_2=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分顺序.

5. 计算曲线积分 $I_3=\displaystyle\oint_C(\mathrm{e}^x\sin y+\arcsin\frac{(x-1)^2}{2})\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x\cos y+\ln(y^4+2))\mathrm{d}y$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=2x$, 逆时针方向.

6. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1,\ x\ge0\}$, 计算二重积分 $I_4=\displaystyle\iint\limits_D\frac{2+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 计算圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截下的部分曲面的面积 S.

8. 求 $f(x,y)=4x^2+6xy+y^3$ 在开区域 $D=\{(x,y)|4x^2+9y^2<36\}$ 内的极值.

二、(12分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性及可微性.

三、(10分）求上半椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1$ $(z\ge0)$ 内接标准长方体的最大体积, 其中 $a,b,c>0$. (注：这里的标准长方体是指各面平行于某坐标平面的长方体)

四、(10分) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1\}$, 计算三重积分 $I_5=\displaystyle\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

五、(10分) 已知空间曲线 C 为 $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2\end{cases}$ $(z\ge0)$, 求曲线积分 $I_6=\displaystyle\int_C z^3\,\mathrm{d}s$.

六、(10分) 1. 证明: $I_7=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$.

2. 证明: $I_8=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$.

3. 对于上面两个积分值不相等，给出你自己的看法.

微积分 II (第一层次)期中试卷 (2021.4.24)

一、计算下列各题（每题6分，共30分）

1. 求曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面与法线方程.

2. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中 f 二阶连续可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 函数 $u=\arctan(x^2+2y+z)$ 在点 $(1,0,2)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,3)$ 的方向导数.

二、计算下列各题（每题8分，共40分）

1. 计算三重积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1,z=2$ 所围立体.

2. 计算曲线积分 $I_2=\oint_L\dfrac{(x+2)^2+(z-3)^2}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y=0\end{cases}$ $(a>0)$.

3. 计算曲线积分 $I_3=\int_C(x^2+2xy)\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,y\ge 0)$, 逆时针方向.

4. 计算 $I_4=\int_{\frac14}^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $D=\{(x,y)||x|\le 2,|y|\le 2\}$, 计算 $I_5=\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、(10分)对任意 $k>0$, 设 Ω_k 为 $\sqrt{x^2+y^2}\le kz$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 所交区域, 记其体积为 V_k. 已知存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{k\to 0^+}\dfrac{V_k}{k^\lambda}$ 为正数, 求 λ 的值及该极限.

四、(10分)求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\le z\le 1$ 上的最大值和最小值.

五、(10分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论 f 在 y 轴点上的连续性,可偏导性及可微性.

微积分II（第一层次）期中试卷参考答案2018.5.5

一、 1. 0； 2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$； 3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y^2\dfrac{F_1'}{F_2'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}-xy\dfrac{F_1'}{F_2'}$;

4. $x+2y+3z-6=0$； 5. 驻点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 处取最小值，驻点 $(0,0)$ 处不取得极值；

6. 沿 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 方向； 7. $I_1=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$; 8. $\dfrac{8}{3}$;

9. $\dfrac{A^2}{2}$; 10. $2\sqrt{2}$; 11. $2\pi(\cos\beta-\sin\beta)$; 12. $y^2\sin x+x^2\cos y$.

二、连续、可偏导、不可微. 三、边长为 $a,b,\dfrac{1}{2}$, 体积为 $\dfrac{1}{2}ab$. 四、$\dfrac{8\pi}{15}$; 五、$\dfrac{4}{105}\pi$.

六、令 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$, 则 $D'=\{(u,v)|1\le u\le 4, 1\le v\le 4$, $J(u,v)=\dfrac{1}{2v}$, 于是由格林公式

$$\oint_C\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\iint_D F'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}F'(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u.$$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 2019.4.27

一、 $I_1=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(\mathrm{e}^{x^2}-1)(\mathrm{e}^{y^3}-1)}{\tan(x^4+y^4)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}\cdot y=0$. (无穷小与有界函数的积是无穷小)

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$. 3. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,-2,1)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(3-\mathrm{e}^{-2}\right)$

4. $I_2=\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$. 5. 由格林公式 $I_3=\displaystyle\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma(D)=\pi$.

6. $I_4=\displaystyle\iint_D\frac{2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{2\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=\pi\ln 2$.

7. 设 S_1 是所求曲面在第一卦限部分的面积. 由对称性，将 S_1 投影到 zOx 坐标面，投影区域为 $D_1=\{(z,x)|0\le z\le\sqrt{2x}, 0\le x\le 2\}$,

$$S=4\iint_{D_1}\sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=4\iint_{D_1}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=4\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}z=16.$$

8. 两个驻点 $(0,0)$ 和 $\left(-\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{2}\right)$. $(0,0)$ 不是极值点. $f\left(-\dfrac{9}{8},\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{27}{16}$ 是极小值.

二、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$ $(x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta)$

$=\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x}=0$, 同理 $f_y'(0,0)=0$. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导；

$\omega = f(x,y) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = f(x,y)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, 则

$\lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{\omega}{\rho} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim\limits_{\rho\to 0^+} \dfrac{\rho^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^3}$不存在，故 f 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、解: 设内接标准长方体在第一卦限的顶点坐标为 (x,y,z), 则长方体的体积 $V = 4xyz$, 其中 $x,y,z > 0$ 且满足 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda) = 4xyz + \lambda\big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\big)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv 4yz + \dfrac{2x}{a^2}\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv 4zx + \dfrac{2y}{b^2}\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \equiv 4xy + \dfrac{2z}{c^2}\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1 = 0, \end{cases}$$

解得唯一的驻点 $\big(\dfrac{\sqrt3}{3}a, \dfrac{\sqrt3}{3}b, \dfrac{\sqrt3}{3}c\big)$. 由问题的几何意义知体积的最大值一定存在, 从而最大体积在此驻点取得，$V_{max} = \dfrac{4\sqrt3}{9}abc$.

四、解：令 $u = \dfrac{x}{a}, v = \dfrac{y}{b}, w = \dfrac{z}{c}$, 则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$, $\Omega' = \{(u,v,w) \mid u^2+v^2+w^2 \le 1\}$.

$I_5 = a^3bc\iiint\limits_{\Omega'} u^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \dfrac{a^3bc}{3}\iiint\limits_{\Omega'}\big(u^2+v^2+w^2\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \dfrac{a^3bc}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \dfrac{4\pi}{15}a^3bc.$

方法2: 设 Ω_1 是 Ω 中 $x \ge 0$ 的部分，$D(x): \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$, 由对称性，

$$I_5 = 2\iiint\limits_{\Omega_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^a x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^a \pi bcx^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{15}a^3bc.$$

五、解: 设 C_1 是 C 在第一卦限的部分，由对称性，有 $I_6 = 4\int_{C_1} z^3\,ds$. 设 $x = z\cos\theta$, $y = z\sin\theta$, 得到曲线 C_1 的参数方程 $x = \sqrt{\cos(2\theta)}\,\cos\theta, y = \sqrt{\cos(2\theta)}\,\sin\theta, z = \sqrt{\cos(2\theta)}, (0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4})$, 计算得 $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2 = \dfrac{1+\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}$. 于是

$$I_6 = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3(2\theta)}\cdot\sqrt{\frac{1+\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\beta\sqrt{1+\sin^2\beta}\,\mathrm{d}\beta \quad (\text{其中 } \beta = 2\theta, \sin\beta = u)$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u = \big(u\sqrt{1+u^2} + \ln(u+\sqrt{u^2+1})\big)\Big|_0^1 = \sqrt2 + \ln(1+\sqrt2).$$

六、1. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3} = \dfrac{(x+y)-2y}{(x+y)^3} = \dfrac{1}{(x+y)^2} - \dfrac{2y}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3}\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{-x}{(x+y)^2}$,

$$I_7=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{-x}{(x+y)^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\left.\dfrac{-x}{(x+y)^2}\right|_{x=0}$ 在 $y=0$ 无定义(无界).

2. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=\dfrac{(-x-y)+2x}{(x+y)^3}=-\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{2x}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y=\int\Big(-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x}{(x+y)^3}\Big)\mathrm{d}y=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}$,

$$I_8=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{y}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\left.\dfrac{y}{(x+y)^2}\right|_{y=0}$ 在 $x=0$ 无定义(无界).

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 (2021.4.24)

一、 1. 切平面方程为 $(x-2)+2(y+3)-(z-1)=0$; 法线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

2. 令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则原式$=\displaystyle\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2}=0$.

3. $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$. 4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{1}{x^2}f_3'+xyf_{11}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''-\dfrac{y}{x^3}f_{33}''+\dfrac{2}{xy}f_{23}''$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}(1,0,2)=\dfrac{9}{10\sqrt{14}}$.

二、1. $I_1=\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\pi z^2\mathrm{d}z=\frac{7}{3}\pi$.

2. 曲线 L 的参数方程为 $x=\dfrac{a}{\sqrt2}\cos\theta, y=-\dfrac{a}{\sqrt2}\cos\theta, z=a\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi]$, 则

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{(\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta+2)^2+(a\sin\theta-3)^2}{a^2}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2+(z'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta+2)^2+(a\sin\theta-3)^2}{a}\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a}{2}+\frac{26\pi}{a}.$$

3. 取 C 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$, θ 从 0 变到 π. 于是

$$I_3\ =\ \int_0^\pi(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta\sin\theta)b\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}ab^2.$$

4. $I_4=\displaystyle\int_{\frac12}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac12}^1 x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\frac{3\mathrm{e}}{8}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

5. $I_5=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\cos\theta}}(\rho^2-1)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{80}{3}+\pi.$

三、解：用球坐标, $\Omega_k'=\{(r,\phi,\theta)|0\le r\le 1,0\le\phi\le\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},0\le\theta\le 2\pi\}$, 则

$$V_k=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^2\sin\phi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi(1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}).$$

而 $\lim\limits_{k\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}{k^2}=\frac{1}{2}$, 所以 $\lambda=2$, 所求极限为 $\frac{\pi}{3}$.

四、解：由于$f_x'=f_y'=f_z'=1$, 故在区域$x^2+y^2\le z\le 1$内部无可疑极值点.

(a) 在边界$x^2+y^2=z(0\le z<1)$上, 令$F(x,y,z,\lambda_1)=x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2-z)$,

由$\begin{cases}F_x'=1+2\lambda_1x=0\\F_y'=1+2\lambda_1y=0\\F_z'=1-\lambda_1=0\\F_{\lambda_1}'=x^2+y^2-z=0\end{cases}$ 解得可疑极值点 $P_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

(b) 在边界$z=1(x^2+y^2<1)$上, 令$G(x,y,z,\lambda_2)=x+y+z+\lambda_2(z-1)$,

由于$G_x'=G_y'=1\ne 0$, 故在该边界上无可疑极值点.

(c) 在边界$z=x^2+y^2,z=1$上，令$H(x,y,z,\lambda_3,\mu_3)=x+y+z+\lambda_3(x^2+y^2-z)+\mu_3(z-1)$

由$\begin{cases}H_x'=1+2\lambda_3x=0\\H_y'=1+2\lambda_3y=0\\H_z'=1-\lambda_3+\mu_3=0\\H_{\lambda_3}'=x^2+y^2-z=0\\H_{\mu_3}'=z-1=0\end{cases}$ 解得可疑极值点 $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $P_3(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.

所以最小值=$\min\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=-\frac{1}{2}$; 最大值=$\max\{f(P_1),f(P_2),f(P_3)\}=1+\sqrt{2}$.

五、(1) $\forall y_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to y_0}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0,y_0)$, 所以 f 在 y 轴点上连续.

(2) $f_x'(0,y_0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+y_0^2)\frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=0$,

$f_y'(0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0$, 所以 f 在 y 轴点上可偏导.

(3) $\omega=f(\Delta x,y_0+\Delta y)-f(0,y_0)-f_x'(0,y_0)\Delta x-f_y'(0,y_0)\Delta y$

$=f(\Delta x,y_0+\Delta y)=(\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\Delta x^2}}$,

$0\le\frac{\omega}{\rho}=\frac{(\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\rho}\le((\Delta x^2+(y_0+\Delta y)^2))\frac{\frac{1}{\rho}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\rho^2}}}\to 0$, $(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\omega}{\rho}=0$, 所以 f 在 y 轴点上可微.