院系:________ 姓名:________ 学号:________

微积分 I（第二层次）期中试卷 2017.11.18

一、求解下列各题（每题6分，共48分）

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}=\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 4}=e^{-4}$.

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{2x^4}$.

解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{2x^4}\xlongequal{\text{等价代换}}\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{2x^4}\\
&\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos(\sin x))}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(2(\frac{\sin x}{2})^2)}{6x^2}\\
&\xlongequal[\text{四则运算}]{\text{等价代换}}1/12.
\end{aligned}$$

3、求函数 $f(x)=\big(\ln(2x)\big)^{(2^x)}$ 的导数.

解：$f(x)=\big(\ln(2x)\big)^{(2^x)}=e^{2^x\ln(\ln(2x))}$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=e^{2^x\ln(\ln(2x))}[2^x\ln(\ln(2x))]'\\
&=\big(\ln(2x)\big)^{(2^x)}\Big[\ln 2\cdot 2^x\ln(\ln(2x))+2^x\frac{1}{\ln(2x)}\frac{2}{2x}\Big].
\end{aligned}$$

4、设函数 y=y(x) 由方程 $y\ln y+x+y=2$ 确定，求 y'，y''.

解：$y'\ln y+y'+1+y'=0\Longrightarrow y'=\frac{-1}{\ln y+2}$,

$y''=\frac{y'}{y(\ln y+2)^2}=\frac{-1}{y(\ln y+2)^3}$.

5、写出函数 $\sin 2x$ 的 6 阶麦克劳林展开式.

解：

$$\begin{aligned}
\sin 2x&=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5+\frac{2^7}{7!}\sin(2\theta x+7\pi/2)x^7\\
&=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}\cos(2\theta x)x^7\quad(0<\theta<1).
\end{aligned}$$

6、求不定积分 $\int\arctan x dx$.

$$\begin{aligned}
\int\arctan x dx&=x\arctan x-\int x\frac{1}{1+x^2}dx\\
&=x\arctan x-\int\frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx\\
&=x\arctan x-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C.
\end{aligned}$$

7、求不定积分 $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[5]{\sin x+\cos x}}dx$.

解：$=\int\frac{-d(\sin x+\cos x)}{\sqrt[5]{\sin x+\cos x}}=-\frac{5}{4}(\sin x+\cos x)^{4/5}+C$.

8、用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$.

证：

$$\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{2-x}{4(x+2)}\right|$$

任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\min\{1,12\varepsilon\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时成立

$$\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{2-x}{4(x+2)}\right|<\frac{|x-2|}{12}<\varepsilon.$$

二、（10分）当 $x \to 0$ 时，$f(x) = 2x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，求 a，b.

解：由题设知 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin ax}{x^2\ln(1-bx)} = 1$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin ax}{-bx^3} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{2-a\cos ax}{-3bx^2} \\
&\xlongequal{a=2} \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{-3bx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{-3bx^2} \xlongequal{\text{等价代换}} \frac{4}{-3b} \xlongequal{b=-4/3} 1.
\end{aligned}$$

三、（10分）设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，$f''(0) = 5$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}} \xlongequal{\frac{0}{0}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x}}}$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)x + f'(x) - f'(x)}{2x} = \dfrac{5}{2}$，代入由四则运算得

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{5/2}$.

四、（10分）设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定，求函数 y=y(x) 的极值点、极值及拐点.

解：令 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} = 0$ 得 $t = \pm 1$，$x(1) = 5$，$x(-1) = -3$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)} = \dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}$.

从而，在 $x = 5$ 时，$y = -1$ 为极小值；在 $x = -3$ 时，$y = 3$ 为极大值；拐点为 $(1, 1)$.

五、（12分）讨论函数 $y = \dfrac{x^2+5x+3}{x^2}$ 的定义域、单调性、极值点、极值、凹凸性、拐点及渐近线，并作出函数曲线.

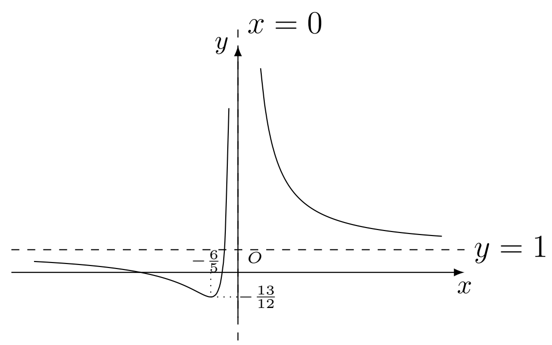
解：函数定义域由 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 构成，无周期性、对称性.

$$y' = \frac{-5x-6}{x^3}, \qquad y'' = \frac{10x+18}{x^4}$$

驻点：$x = -6/5$；$y(-6/5) = -13/12$ 为极小值；$(-9/5, -23/27)$ 为拐点.
在区间 $(-\infty, -9/5)$ 内，曲线凸；在 $(-9/5, 0)$ 内，曲线凹；在 $(0, \infty)$ 内，曲线凹.

x	$(-\infty, -9/5)$	$-9/5$	$(-9/5, -6/5)$	$-6/5$	$(-6/5, 0)$	$(0, \infty)$
y'	$-$	$-81/75$	$-$	0	$+$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y	凸 $\searrow$	$-23/27$	凹 $\searrow$	极小值 $-13/12$	凹 $\nearrow$	凹 $\searrow$

渐近线：$x = 0$，$y = 1$.



六、（10分）求不定积分 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$.

解：令 $x = a\sin u$，$-\pi/2 < u < \pi/2$，则 $dx = a\cos u du$，

$$\begin{aligned}
&\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int\cos^2 u du = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2u)du \\
&= \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C = \frac{a^2}{2}(u + \sin u\cos u) + C \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin(x/a) + (x/a)\sqrt{1-(x/a)^2}\right] + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin(x/a) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.
\end{aligned}$$