**2016-2017 学年第一学期《微积分 I（第二层次）》期末考试 A 卷参考答案 2016.12.28**

一、（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）求下列函数的导数、微分：

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^x=x^y$ 所确定，求 $y'(x)$.

解：对 $y^x=x^y$ 两边取对数为：$x\ln y=y\ln x$，两边关于 $x$ 求导，

得 $\ln y+\dfrac{xy'}{y}=y'\ln x+\dfrac{y}{x}$，最后解得，$y'=\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}=\dfrac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$.

2. 设函数 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 $dy, dy|_{x=1}$.

解：$dy=(2x\arctan x+1)dx,\quad dy|_{x=1}=(1+\pi/2)dx.$

二、（共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x})$.

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{(e^x-1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)dt}{x^2}$.

解：令 $xt=u$，原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{1}{u}\ln(1+u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)2x}{2x}=1.$

三、（共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）计算下列各题：

(1) $\int_{-1}^{1}(x^{10}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sin x)dx$.

解：原式$=2\int_0^1 x\sin xdx=2(-x\cos x|_0^1+\int_0^1\cos xdx)$

$$=2(-\cos 1+\sin x|_0^1)=2(\sin 1-\cos 1).$$

(2) $\int_{a/2}^{a}\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx(a>0)$.

解：令 $x=a\sin t$，则

原式$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot^2 tdt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\csc^2 t-1)dt=-(\cot t+t)|_{\pi/6}^{\pi/2}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}.$

(3) $\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$.

解：令 $\sqrt{1-x}=t, x=1-t^2, dx=-2tdt$，则原式$=2\int_0^1\dfrac{1}{1+t^2}dt=2\arctan t|_0^1=\dfrac{\pi}{2}.$

(4)求由 $xy=1$, $y=x, x=2$ 所围成的平面图形的面积.

解：区域图略. $S=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{2}x^2-\ln x)|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$

四、(共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分) 求解下列微分方程的通解（或通积分）：

(1) $(x^2+1)y'+xy=(x^2+1)^{5/2}x$.

解：原微分方程可以化为：$y'+\frac{x}{x^2+1}y=(x^2+1)^{3/2}x$，所以由公式，得

$$y=e^{-\int\frac{x}{x^2+1}dx}\{C+\int x(x^2+1)^{3/2}e^{\int\frac{x}{x^2+1}dx}dx\}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\{C+\int x(x^2+1)^2dx\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\{C+\frac{1}{6}(x^2+1)^3\}.$$

(2) $y''-6y'+9y=0$.

解：特征方程为：$r^2-6r+9=0\Rightarrow r=3$，所以所求通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{3x}$.

五、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $R$ 上连续，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$，证明：

（1） 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

（2） 若 $f(x)$ 为单调增函数，则 $F(x)$ 为单调减函数.

证明：（1） $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt$，令 $t=-u$，

$$F(-x)=\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-du)=\int_0^x(x-2u)f(u)du=F(x)$$，所以 $F(x)$ 是偶函数.

（2） $F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$，则

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=x(f(\xi)-f(x))<0,$$ ($\xi$在 0 与 $x$ 之间)，

所以 $F(x)$ 为单调减函数.

六、(10 分) 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数，证明：

$\int_a^{a+nT}f(x)\,dx=n\int_0^T f(x)\,dx, \forall n\in N$,并计算 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1\text{-}\cos 2x}\,dx$.

证明：$\int_a^{a+nT}f(x)\,dx=\int_0^{nT}f(x)\,dx=(\int_0^T+\int_T^{T+T}+\int_{2T}^{2T+T}+\cdots+\int_{(n-1)T}^{(n-1)T+T})f(x)\,dx$

$$=n\int_0^T f(x)\,dx, \forall n\in N.$$

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1\text{-}\cos 2x}\,dx=100\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=100\sqrt{2}\cos x\,|_0^{\pi}=200\sqrt{2}.$$

**七.**（10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$. (1)求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值. (2) $\forall\lambda>0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛 .

**解：** (1) $\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, $s_n=1-\frac{1}{n+1}\to 1$.

(2) $0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx \underset{\tan x=t}{=} \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$

$\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$, $\because \lambda+1>1$，所以原级数收敛.

**八、（10 分）求微分方程 $y''+y'-2y=e^x+2x+3$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{1}{3}$ 的特解.**

**解：** $y''+y'-y=0$ 的特征方程为：$r^2+r-2=0$，其特征根为：$-2,1$. 其通解为：$\overline{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 对于 $f_1(x)=e^x$，微分方程 $y''+y'-2y=e^x$ 的特解为：$y_1{}^*(x)=Axe^x$. 代人上述微分方程，得 $A=\frac{1}{3}$. 所以 $y_1{}^*(x)=\frac{1}{3}xe^x$. 对于 $f_2(x)=2x+3$，微分方程 $y''+y'-2y=2x+3$ 的特解为：$y_2{}^*(x)=Ax+B$. 代人上述微分方程，得 $A=-1, B=-2$，所以 $y_2{}^*(x)=-(x+2)$.

所以所求通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x-x-2$.

由初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{1}{3}$，**可以确定** $C_1=\frac{5}{3}, C_2=\frac{1}{3}$，**所以所求特解为：**

$y(x)=\frac{5}{3}e^x+\frac{1}{3}e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x-x-2$.