2015-2016 学年第一学期《微积分 I（第二层次）》期末考试 A 卷参考答案 2016.1.6

一、求下列函数的导数：（每小题 6 分，共 12 分）：

1. **设函数** $y=\ln(\cos x+\sin x)$，**求** $y'(x)$.

解： $y'=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

2. **设函数** $y=x^2e^x$，**求** $\dfrac{dy}{dx}$.

解： $\dfrac{dy}{dx}=e^x(x^2+2x)$.

二、求下列极限（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$；

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(e^x-1)(\cos x-1)}{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}$.

解： 原式 $=\dfrac{-1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}=\dfrac{-1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3}{2x\arcsin x^2}=-1$.

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 24 分）：

(1) $\int_{-1}^{1}(\dfrac{x^4+x^{100}\sin x}{1+x^2})dx$；

解： 原式 $=2\int_0^1\dfrac{x^4}{1+x^2}dx=2\int_0^1(x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2})dx=2(\dfrac{x^3}{3}-x+\arctan x)\big|_0^1=2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3})$.

(2) $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx$；

解： 原式 $=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\big|_1^{e^2}-\dfrac{2}{3}\int_1^{e^2}\sqrt{x}dx=\dfrac{4}{3}e^3-\dfrac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\big|_1^{e^2}=\dfrac{4}{9}(2e^3+1)$.

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+5}dx$；

解： 原式 $=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\arctan((x+1)/2)\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan(1/2)/2.$

(4) **求由** $xy=3$ **和** $x+y=4$ **所围成的平面图形的面积.**

解：联立$\begin{cases} xy=3, \\ x+y=4. \end{cases}$ 解得交点为 $A(1,3),B(3,1)$，则所求平面图形的面积为：

$$S=\int_1^3(4-x-\frac{3}{x})dx=(4x-\frac{1}{2}x^2-3\ln x)|_1^3=4-3\ln 3.$$ （平面图形略）

四、求解下列微分方程的通解（或通积分）（每小题 6 分，共 12 分）：

(1) $(x+2)y'-2y=e^x(x+2)^3$；

解：原方程可写为 $y'-\frac{2}{(x+2)}y=e^x(x+2)^2$，这是一阶非齐次线性微分方程，所以

$$y(x)=e^{\int\frac{2}{x+2}dx}(C+\int e^x(x+2)^2e^{-\int\frac{2}{x+2}dx}dx)=(x+2)^2(C+e^x).$$

(2) $y''-2y'+5y=0$.

解：其特征方程为 $r^2-2r+5=0$，其特征根为 $r=1\pm 2i$. 所以所求通解为：

$$y(x)=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=\int_0^1 xf(x)\,dx$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)/\xi$.（10 分）.

解：设 $F(x)=xf(x)$，$x\in[0,1]$，由积分中值定理，存在 $b\in(0,1)$，使得

$f(1)=bf(b)$，$F(x)\in C_{[b,1]},F(x)\in D_{(b,1)}$，又 $F(1)=f(1)=bf(b)=F(b)$，

由洛尔定理，存在 $c\in(b,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$. 注意到 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，

所以有 $f'(\xi)=-f(\xi)/\xi$. 证毕.

六、讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ 的收敛性，如果收敛，求其和（10 分）.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(2n-1)}=\frac{1}{3}<1.$ 由比值法知该级数收敛.

$$s=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{3^{k-1}}-\frac{k+1}{3^k})=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{n+1}{3^n})=1.$$

七、将 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $(x-1)$ 的幂级数.（10 分）.

解： $f(x)=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}]$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}](x-1)^n\ (-1<x<3).$$

八、求微分方程 $y''+2y'-3y=\cos x$ 的通解（10 分）.

解： $y''+2y'-3y=0$ 的特征方程为：$r^2+2r-3=0$，其特征根为：$-3,1$. 其通解为：$\overline{y}(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$. 设原方程的特解为：$y^*(x)=A\cos x+B\sin x$. 代人原方程，得 $A=-\frac{1}{5},B=\frac{1}{10}$. 所以所求通解为：$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$.