院系:______ 姓名:______ 学号:______

微积分 I（第二层次）期中试卷（2015.11.14）

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n+3}\right)^n$。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n+3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5n+3}\right)^{\frac{5n+3}{1}\frac{n}{5n+3}}=e^{1/5}$

2、求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin(4x)}$。

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin(4x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{4\cos(4x)}=-1/2$

3、设 $x=3\cos t$，$y=\sin(2t)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos(2t)}{-3\sin t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{4\sin(2t)\sin t+2\cos(2t)\cos t}{9\sin^3 t}$

4、求由 $y=\sin(x+y)$ 所确定的隐函数的二阶导数 y''。

解：$y'=(1+y')\cos(x+y)\quad\Longrightarrow\quad y'=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

$y''=-\dfrac{(1+y')\sin(x+y)}{\big(1-\cos(x+y)\big)^2}=-\dfrac{\sin(x+y)}{\big(1-\cos(x+y)\big)^3}$

5、写出 $\ln(1+2x)$ 的 4 阶麦克劳林展开式。

解：$\ln(1+2x)=2x-\dfrac{4x^2}{2}+\dfrac{8x^3}{3}-\dfrac{16x^4}{4}+\dfrac{32x^5}{5(1+2\theta x)^5},\quad 0<\theta<1$

6、证明当 $x>0$ 时，不等式 $x+\dfrac{x^2}{2}\ge(x+1)\ln(1+x)$ 成立。

证：令 $y=x+\dfrac{x^2}{2}-(x+1)\ln(1+x)$ 则

$y'=x-\ln(1+x)$，$y''=1-\dfrac{1}{1+x}\ge 0$，得 $y'>0$，从而 y 单调上升。

又 $y(0)=0$，得 $y>0$。

7、求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^3+2x}{x^4+1}dx$。

解：$=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\frac{1}{x^4+1}d(x^4)+\int\frac{1}{x^4+1}d(x^2)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\arctan(x^2)+C$

8、用极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$。

证：任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\min\{8,3\varepsilon\}$，则当 $0<|x-8|<\delta$ 时成立

$$|\sqrt[3]{x}-2|=\frac{|x-8|}{|(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4|}\le\frac{|x-8|}{4}<\varepsilon$$

二、（10分）函数

$$f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x<0 \\ 2-bx, & x\geq 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处可导，求常数 a 和 b 的值及 $f'(x)$。

解：函数处处可导推出函数处处连续，$f(x)$ 在 $x=0$ 处左极限 a 等于右极限 2；$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右导数

$$f'_-(0)=4, \qquad f'_+(0)=-b$$

由在 0 点导数存在，得左右导数相等，即 $b=-4$。

$$f'(x)=\begin{cases} 4e^{2x}, & x<0 \\ 4, & x\geq 0 \end{cases}$$

三、（8分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$。

解：令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x}$。

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\frac{x^2}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{x} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3} \\
&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-\frac{1}{3}}$。

四、（10分）若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<f(x)<1$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ 使得$f(\xi)=\xi$。

证：令 $g(x)=f(x)-x$，则由题意可知，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)>0$，$g(1)<0$。由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $g(\xi)=0$，得证。

五、（14分）讨论函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的定义域、单调性、极值点、极值、凹凸性、拐点及渐近线，并作出函数曲线。

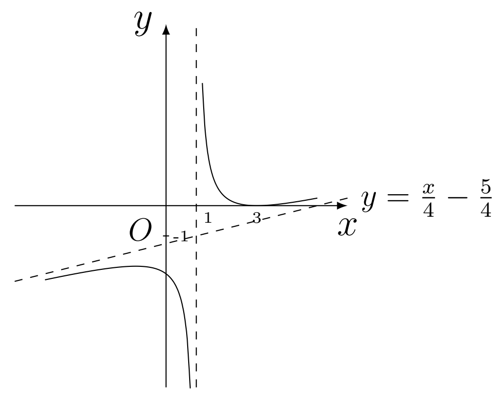
解：函数定义域由 $(-\infty,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 构成，无周期性、对称性。

$$y'=\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \qquad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

驻点：$x=-1$ 和 $x=3$；$y(-1)=-2$ 为极大值，$y(3)=0$ 为极小值。在区间 $(-\infty,1)$ 内，曲线凸；在 $(1,+\infty)$ 内，曲线凹，无拐点。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	凸 ↗	极大值 -2	凸 ↘	凹 ↘	极小值 0	凹 ↗

渐近线：$x=1$，$y=\dfrac{x}{4}-\dfrac{5}{4}$



六、（10分）求不定积分 $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$。

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式}=&\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx \\
=&\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx \\
=&\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C
\end{aligned}$$