2014-2015 学年第一学期《微积分 I（第二层次）》期末考试 A 卷参考答案 2015.1.7

一、求下列极限（每小题 6 分，共 18 分）：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{1}{x}+2=3.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{1+n^2})^{\frac{1}{\ln n}}$；

解： 先考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}=\exp[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}]=\exp[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/\sqrt{1+x^2}}{1/x}]=e.$

设 $x_n=n\to\infty$，由海涅定理得，原式 $=e$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{x/\sqrt{1+x^2}}=\frac{\pi^2}{4}.$

二、计算下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

(1) $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{(\arcsin x)^2+(\arctan x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{1/2}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx+0=\frac{2}{3}(\arcsin x)^3\Big|_0^{1/2}=\frac{\pi^3}{324}.$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(3+x)}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{3+x}d\sqrt{x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

(3) **求由** $y=x^2, y=2-x, y=0$ **所围成的平面图形的面积.**

$S=\int_0^1(2-y-\sqrt{y})dy=\frac{5}{6}.$ 或 $S=\int_0^1x^2dx+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$

三、求解下列微分方程的通解（或通积分）（每小题 6 分，共 12 分）：

(1) $(y^2-6x)y'+2y=0$；

解： 原微分方程可写为 $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}(y\neq0)$，

所以 $x=e^{\int\frac{3}{y}dy}[C-\int\frac{y}{2}e^{\int\frac{-3}{y}dy}dy=Cy^3+\frac{y^2}{2}.$

(2) $y''+4y'+15y=0$.

解： 特征方程为：$\lambda^2+4\lambda+15=0$，特征值为：$\lambda=-2\pm\sqrt{11}i$，

所以所求通解为：$y=e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{11}x+C_2\sin\sqrt{11}x)$.

四、讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^{2p}})$ 的敛散性（10 分）.

解： $a_n=\ln(1+\frac{1}{n^{2p}})\to\begin{cases}\ln 2, p=0,\\ +\infty, p<0.\end{cases}$ 所以原级数在 p 小于等于 0 时发散.

$p>0, a_n=\ln(1+\frac{1}{n^{2p}})\sim\frac{1}{n^{2p}}$，所以由 p 级数的敛散性知原级数在 $p>1/2$ 时收敛，在 $0<p\le 1/2$ 时原级数发散. 综上所述原级数在 $p>1/2$ 时收敛，在 $p\le 1/2$ 时原级数发散.

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)\,dx$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$（提示：使用积分中值定理、微分中值定理）（8 分）.

证明： 构造函数 $F(x)=xf(x), x\in[0,1]$，由题意 $F(1)=f(1)=cf(c)=F(c), 0<c<1/2$，而 $F(x)$ 在 $[c,1]$ 上连续，在 $(c,1)$ 内可导，由洛尔定理知至少存在一个 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，由于 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，所以有 $f'(\xi)=-f(\xi)/\xi$.

六、设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续，证明 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$，利用此结果计算 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx$.（10 分）.

解： $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$ ，而

$\int_{-a}^{0}f(x)dx=(x=-t)=\int_a^0 f(-t)(-dt)=\int_0^a f(-x)dx$ ，代人上式中得证.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\pi/4}[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}]dx=\int_0^{\pi/4}\frac{2}{\cos^2 x}dx=2\tan x\,|_0^{\pi/4}=2.$$

七、解微分方程 $y''=1+(y')^2$（8 分）.

解： 设 $y'=p(x)$，则原微分方程化为：$dp/dx=1+p^2$，解得 $\arctan p=x+C_1$，

即 $y'=\tan(x+C_1)$，所以 $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$.

八、求 $y''-y'-6y=e^{-2x}$ 的通解（8 分）.

解： $y''-y'-6y=0$ 的特征方程为：$r^2-r-6=0$，特征根为 $r=-2,3$ 所以 $y''-y'-6y=0$ 的通解为 $\tilde{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

对 $f(x)=e^{-2x}$，令 $y^*(x)=Axe^{-2x}$，将其代人 $y''-y'-6y=e^{-2x}$ 中得 $A=\frac{-1}{5}$，

所以 $y^*(x) = \dfrac{-1}{5} x e^{-2x}$.

故所求通解为： $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{5} x e^{-2x}$.

九、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的收敛域与和函数（8 分）.

解： $R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1, x = \pm 1$ 时，数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \pm (n+1)^2$ 发散，所以该幂级数的收敛域为：（-1, 1）.

设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$，则 $\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)^2 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$，

设 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$，则 $\int_0^x g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \dfrac{x}{1-x}$，所以 $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3} .$$