2016-2017 第二学期微积分第一层次期中考卷参考答案

一. 计算下列各题 (每小题 6 分，共 48 分).

1. 求极限 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}$.

解: $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-(x^2+y^2)/2}{(x^2+y^2)/2}=-1.$

2. 设函数 $u=x^2y+y^2z+z^2x$, 求 u 在点 (1, 1, 1) 处沿方向 $\vec{l}=(1,2,1)$ 的方向导数.

解: $\partial_x u=2xy+z^2,\ \partial_y u=2yz+x^2,\ \partial_z u=2zx+y^2.\quad \nabla u\big|_{(1,1,1)}=(3,3,3).$

$\partial_{\vec{l}}u\big|_{(1,1,1)}=\nabla u\cdot\vec{l}\big|_{(1,1,1)}/|\vec{l}|=(1\times 3+2\times 3+1\times 3)/\sqrt{6}=2\sqrt{6}.$

3. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定, 其中 F 连续可微且 $F_1'+F_2'\neq 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: $F_1'(1-\partial_x z)-F_2'\partial_x z=0,\ -F_1'\partial_y z+F_2'(1-\partial_y z)=0.$

上述两式相加, 得: $F_1'+F_2'=(F_1'+F_2')(\partial_x z+\partial_y z)$. 从而 $\partial_x z+\partial_y z=1$.

4. 设 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: $\partial_x z=v\partial_x u+u\partial_x v,\quad \partial^2_{xy}z=\partial_x u\partial_y v+\partial_x v\partial_y u+v\partial^2_{xy}u+u\partial^2_{xy}v.$

对 x,y 关于 u,v 的表达式两边分别关于 x,y 求偏导得:

$$1=e^u\cos v\partial_x u-e^u\sin v\partial_x v,\ 0=e^u\cos v\partial_y u-e^u\sin v\partial_y v;$$

$$0=e^u\sin v\partial_x u+e^u\cos v\partial_x v,\ 1=e^u\sin v\partial_y u+e^u\cos v\partial_y v.$$

从而 $\partial_x u=e^{-u}\cos v,\ \partial_x v=-e^{-u}\sin v;\ \partial_y u=e^{-u}\sin v,\ \partial_y v=e^{-u}\cos v.$

进一步有 $\partial^2_{xy}u=-e^{-u}\cos v\partial_y u-e^{-u}\sin v\partial_y v=-e^{-2u}\sin(2v).$

$$\partial^2_{xy}v=e^{-u}\sin v\partial_y u-e^{-u}\cos v\partial_y v=-e^{-2u}\cos(2v).$$

从而 $\partial_x z=e^{-u}(v\cos v-u\sin v),\ \partial^2_{xy}u=e^{-2u}\{\cos(2v)-v\sin(2v)-u\cos(2v)\}.$

5. 求积分 $I=\iint_D e^{-y^2}dxdy$, 其中 D 是由直线 $x=0,y=1$ 和 $x=y$ 围成的闭区域.

解: $I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$

6. 求 $I=\int_C (1+ye^x)dx+(x+e^x)dy$, 其中 C 为沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0)$ 由点 $A(a,0)$ 按逆时针方向到 $B(-a,0)$ 的弧线.

解: 取曲线 C_1 为 x 轴上从 $(-a,0)$ 到 $(a,0)$ 的一段, 则曲线 C 与曲线 C_1 所围区域 $D_1=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ y\geq 0\}$ 以 $C+C_1$ 为其正向边界. 从而结合格林公式:

$$\begin{aligned}
I&=\int_{C+C_1}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy-\int_{C_1}(1+ye^x)dx+(x+e^x)dy\\
&=\iint_{D_1}dxdy-\int_{-a}^{a}dx\\
&=\frac{\pi}{2}ab-2a.
\end{aligned}$$

7. 求三元积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$, 其中 Ω 为区域 $\{(x,y,z):x^2+y^2\leq z\leq 2\}$.

解: 由于区域关于 x,y 对称, 从而

$$\begin{aligned}
I&=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz\\
&=\int_0^2 dz\int_{x^2+y^2\leq z}(x^2+y^2+z^2)dxdy\\
&=\int_0^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho(\rho^2+z^2)d\rho\\
&=\pi\int_0^2(\frac{z^2}{2}+z^3)dz=\frac{16\pi}{3}.
\end{aligned}$$

8. 求第一型曲线积分 $I=\int_C xyds$, 其中 C 为 $y^2=2x$ 上 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧.

解: $I=\int_0^2\frac{y^3}{2}\sqrt{1+y^2}dy=\frac{1}{4}\int_0^4 y\sqrt{1+y}dy=\frac{1}{6}y(1+y)^{3/2}\big|_0^4-\frac{1}{6}\int_0^4(1+y)^{3/2}dy=\frac{5}{3}\sqrt{5}+1/15.$

二.（本题 8 分）求曲线 $\begin{cases} y^2-2x=1\\ x^2+2y^2+z^2=6\end{cases}$ 在点 $P_0(0,1,2)$ 处的切线和法平面方程.

解: $\vec{l_1}=(-2,2y,0)\big|_{P_0}=(-2,2,0),\ \vec{l_2}=(2x,4y,2z)\big|_{P_0}=(0,4,4)$, 从而所求切线的方向为:

$n=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=8(1,1,-1)$, 可取其平行方向 $n_0=(1,1,-1)$.

从而所求切线方程为: $x=y-1=-(z-2)$, 所求法平面方程为: $x+y-z+1=0$.

三.（本题 10 分） 求二元函数 $f(x,y)=3x^2+2\sqrt{2}xy+4y^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值和最小值.

解: 构造拉格朗日函数: $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x^2+y^2-1)$, 从而令:

$$\partial_x F(x,y,\lambda)=6x+2\sqrt{2}y+2\lambda x=0,$$
$$\partial_y F(x,y,\lambda)=2\sqrt{2}x+8y+2\lambda y=0,$$
$$\partial_\lambda F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-1=0.$$

解得可疑驻点为: 当 $\lambda=-2$ 时, $P_1(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}),\ P_2(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$; 当 $\lambda=-5$ 时, $P_3(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}),\ P_4(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}))$.

经计算得: $f(P_1)=2,\ f(P_2)=2,\ f(P_3)=5,\ f(P_4)=5$. 所以所求最大值为 $f(P_3)=f(P_4)=5$, 最小值为 $f(P_1)=f(P_2)=2$.

四.（本题 10 分）已知 S 是圆柱体

$$C_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,-1\le z\le 1\},\ C_2=\{(x,y,z):x^2+z^2\le 1,-1\le y\le 1\}$$

的交集所在区域的表面, 求曲面 S 的面积.

解: 由对称性, S 的面积 $S=4\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{1}{1-x^2}}dx=4\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1/\sqrt{1-x^2}dy=16.$

五.（本题 12 分）设 $D_t=\{(x,y):t\le xy\le 2t,t\le \frac{y}{x}\le 2t,x>0,y>0\}(t>0)$, 则 (1). 对固定的 $t>0$, 求区域 D_t 的面积; (2). 求常数 α,β, 使得 $\beta=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left[\iint_{D_t}e^{\frac{y}{x}}dxdy-\alpha t\right]$.

解: (1). 令 $u=xy,\ v=y/x$, 则 $J(u,v)=\frac{1}{2v}$, 从而: $S(D_t)=\int_t^{2t}du\int_t^{2t}\frac{1}{2v}dv=\frac{\ln 2}{2}t.$

(2). $\int_{D_t}e^{y/x}dxdy=\int_t^{2t}du\int_t^{2t}\frac{e^v}{2v}dv=\int_t^{2t}du\int_t^{2t}\frac{e^v-1}{2v}dv+\frac{\ln 2}{2}t=e^{\xi}\frac{t^2}{2}+\frac{\ln 2}{2}t\ (\xi\in(t,2t)).$

当取 $\alpha=\frac{\ln 2}{2}$ 时, $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left[\iint_{D_t}e^{y/x}dxdy-\alpha t\right]=\lim\limits_{t\to 0^+}e^{\xi}/2=1/2=\beta.$

从而 $\alpha=\frac{\ln 2}{2},\ \beta=1/2.$

六.（本题 12 分）讨论函数 $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)\arcsin(xy^2)}{x^2+y^2},\ (x,y)\ne(0,0)\\ 0,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及连续可微性 (其中 $\varphi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数).

解: $|u(x,y)|\le|\varphi(x)||x|y^2/(x^2+y^2)\le|\varphi(x)||x|$, 从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u(x,y)=0=u(0,0)$, 即 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

$\partial_x u(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=0,\ \partial_y u(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=0$. 从而 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

此时当 $\varphi(0)=0$ 时, $|u(x,y)|\le|\varphi(x)||x|=o(\rho)\ ((x,y)\to(0,0))$, 从而 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微; 而当 $\varphi(0)\ne 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{u(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{\varphi(0)}{2\sqrt{2}}\ne 0$, 从而 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微, 从而更不是连续可微.

在 $\varphi(0)=0$ 的情形下, 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \frac{\varphi'(x)\arcsin(xy^2)+\varphi(x)y^2/\sqrt{1-x^2y^4}}{x^2+y^2}-\frac{2x\varphi(x)\arcsin(xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \partial_y u &= \frac{2xy\varphi(x)/\sqrt{1-x^2y^4}}{x^2+y^2}-\frac{2y\varphi(x)\arcsin(xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

此时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\partial_x u=0=\partial_x u(0,0),\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\partial_y u=0=\partial_y u(0,0).$$

从而当 $\varphi(0)=0$ 时, u 在 $(0,0)$ 处连续可微; 在其他点处, 由于 u 是光滑函数, 从而连续可微.