

微积分II (第一层次) 期中试卷参考答案<sub>2016.4.23</sub>

一、计算下列各题 (5分×8 = 40分)

1. 设  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ , 所以  $\Delta z = 0$ .

2. 设函数  $z = z(x, y)$  由  $F(x - y, y - z, z - x) = 0$  所确定, 其中  $F(u, v, w)$  连续可微. 求  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-F'_1 + F'_2}{F'_2 - F'_3}$ , 所以  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

3. 计算二重积分  $I_1 = \iint_D xy^2 dx dy$ , 其中  $D$  是  $x = 1, y^2 = 4x$  所围闭区域.

解  $I_1 = 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^1 xy^2 dx = \int_0^2 (y^2 - \frac{y^6}{16}) dy = \frac{32}{21}$ .

4. 计算累次积分  $I_2 = \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1 - x^4} dx$ .

解  $I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} \sqrt{1 - x^4} dy = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^4} dx = -\frac{(1 - x^4)^{\frac{3}{2}}}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ .

5. 计算三重积分  $I_3 = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为  $z = 0$  与  $y + z = 1, y = x^2$  所围的空间区域.

解 积分区域关于  $x = 0$  对称, 被积函数关于  $x$  是奇函数, 所以  $I_3 = 0$ .

6. 计算三重积分  $I_4 = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ .

解 由对称性,  $\iiint_{\Omega} (2xy + 2xz + 2yz) dx dy dz = 0$ ,

$$I_4 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad (x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{15}$$

7. 计算曲线积分  $I_5 = \oint_C x \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , 其中  $C: x^2 + y^2 = 2x$ .

解 曲线  $C$  的参数方程为  $x = 2 \cos^2 \theta, y = 2 \cos \theta \sin \theta, (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ , 则  $I_5 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \cos^3 \theta d\theta = \frac{32}{3}$ .

8. 计算曲线积分  $I_6 = \int_C y^2 dx + xy dy + zx dz$ , 其中  $C$  为从  $O(0, 0, 0)$  出发, 经过  $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0)$  到  $D(1, 1, 1)$  的折线段.

解:  $I_6 = \int_{\overline{OA+AB+BD}} y^2 dx + xy dy + zx dz = 0 + \int_0^1 y dy + \int_0^1 z dz = 1.$

二、计算下列各题 (8分×5 = 40分)

1. 求函数  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  在点  $P(3, 4, 5)$  处沿曲线  $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$  在该点的切线方向的方向导数.

解 记  $F = 2x^2 + 2y^2 - z^2 - 25, H = x^2 + y^2 - z^2$ , 则切向量为

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left( \frac{D(F, H)}{D(y, z)}, \frac{D(F, H)}{D(z, x)}, \frac{D(F, H)}{D(x, y)} \right) \Big|_{(3,4,5)} = \left( \begin{vmatrix} 4y & -2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2z & 4x \\ -2z & 2x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4x & 4y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} \right) \Big|_{(3,4,5)} \\ &= (-4yz, 4xz, 0) \Big|_{(3,4,5)} = (-80, 60, 0) = 100 \left( -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$u'_x(3, 4, 5) = \frac{-xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4,5)} = -\frac{3}{25}, \quad u'_y(3, 4, 5) = \frac{-yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4,5)} = -\frac{4}{25},$$

$$u'_z(3, 4, 5) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(3,4,5)} = \frac{1}{5}, \quad \text{所以所求方向导数为 } \left(-\frac{3}{25}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{4}{25} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times 0 = 0.$$

2. 利用拉格朗日乘数法计算椭圆周  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$  上的点与坐标原点之间的最近和最远距离.

解 问题转化为求  $d^2 = x^2 + y^2$  满足约束条件  $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9$  的最大最小值.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9),$$

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0, \\ F'_y = 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0, \end{cases} \quad \text{得驻点 } \pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

经计算, 椭圆周上的点  $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  与坐标原点距离最近, 最近距离为1; 椭圆周上点  $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$  处与坐标原点距离最远, 最远距离为3.

3. 设  $\Omega$  是由  $z = x^2 + 3y^2$  与  $z = 8 - x^2 - y^2$  所围立体, 求  $\Omega$  的体积  $V$ .

解 两曲面  $z = x^2 + 3y^2$  与  $z = 8 - x^2 - y^2$  的交线在  $xOy$  平面上的投影为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 此曲线所围区域记为  $D$ , 则

$$\begin{aligned} V &= \iint_D ((8 - x^2 - y^2) - (x^2 + 3y^2)) dx dy = 2 \iint_D (4 - x^2 - 2y^2) dx dy \quad (x = 2\rho \cos \theta, y = \sqrt{2}\rho \sin \theta, J = 2\sqrt{2}\rho) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 8\sqrt{2}\rho(1 - \rho^2) d\rho = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

4. 求圆柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  被曲面  $z^2 = 2y$  所截部分的面积.

解 设所求曲面在第一卦限部分的面积为  $S_1$ , 其方程为  $x = \sqrt{2y - y^2}$ ,  $(y, z) \in D$ ,

$$D = \{(y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{2y}, 0 \leq y \leq 2\}. \quad x'_y = \frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}, x'_z = 0,$$

$$S = 4S_1 = 4 \iint_D \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} dx dy = 4 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y}} \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}} dz = 4 \int_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-y}} dy = 16.$$

5. 计算曲线积分  $I_7 = \int_C \cos(x+y^2)dx + (2y \cos(x+y^2) - \sqrt{1+y^4})dy$ , 其中  $C$  为  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  上从  $O(0, 0)$  到  $A(2\pi a, 0)$  的一段弧.

解 记  $P = \cos(x+y^2), Q = 2y \cos(x+y^2) - \sqrt{1+y^4}$ , 则  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = -2y \sin(x+y^2)$ , 所以积分与路径无关, 取  $\overline{OA}: y=0, (0 \leq x \leq 2\pi a)$ ,  $I_7 = \int_{OA} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi a} \cos x dx = \sin(2\pi a)$ .

三、(10分) 设函数  $u = f(x, y, z)$  有连续的一阶偏导数, 又函数  $y = y(x)$  及  $z = z(x)$  分别由下列两式确定:  $e^{xy} - xy = 2, e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .

解  $\frac{du}{dx} = f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} + f'_z \frac{dz}{dx}$ . 设  $F(x, y) = e^{xy} - xy - 2, G(x, z) = e^x - \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{e^x - \frac{\sin(x-z)}{x-z}}{\frac{\sin(x-z)}{x-z}} = 1 - \frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)},$$

$$\text{所以 } \frac{du}{dx} = f'_x - \frac{y}{x} f'_y + \left(1 - \frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)}\right) f'_z.$$

四、(10分) 函数  $f(x)$  连续可微且  $f(0) = 1$ . 若积分

$$\int_0^A \left[ \frac{1}{2}(x-f(x))y^2 + \frac{1}{3}f(x)y^3 + x \ln(1+x^2) \right] dx + \left[ f(x)y^2 - f(x)y + \frac{x^2y}{2} + \frac{\sin y}{1+\cos^2 y} \right] dy$$

与路径无关, 其中  $O(0, 0)$  以及  $A(1, 1)$  为两个固定点. 求  $f(x)$  以及此积分值.

解: 为方便起见, 令

$$P(x, y) = \frac{1}{2}(x-f(x))y^2 + \frac{1}{3}f(x)y^3 + x \ln(1+x^2), \quad Q(x, y) = f(x)y^2 - f(x)y + \frac{x^2y}{2} + \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}.$$

由于积分与路径无关, 则有  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 即  $[x-f(x)]y + f(x)y^2 = f'(x)y^2 + [x-f'(x)]y$ . 从而有  $f(x) = f'(x)$ , 注意  $f(0) = 1$ , 则  $f(x) = e^x$ . 选择  $B(1, 0)$ , 有

$$\int_0^A Pdx + Qdy = \left( \int_{OB} + \int_{BA} \right) Pdx + Qdy.$$

$$\int_{OB} Pdx + Qdy = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_{BA} Pdx + Qdy = \int_0^1 \left[ e(y^2 - y) + \frac{y}{2} + \frac{\sin y}{1+\cos^2 y} \right] dy = \frac{1+\pi}{4} - \frac{e}{6} - \arctan(\cos 1).$$

所以, 原积分值为  $\ln 2 + \frac{\pi-1}{4} - \frac{e}{6} - \arctan(\cos 1)$ .