2014-2015 学年第二学期第一层次微积分 II 期中试卷参考答案 2015.4.25

一、计算下列各题：（每小题 6 分，共 48 分）

1. 设函数 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2};\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-x}{x^2+y^2};\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\therefore \Delta z=0.$

2. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程与法平面方程.

解： $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的法向量为：$\vec{n}_1=(2,-2,-1)$，$x^2+y^2=2x$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的法向量为：$\vec{n}_2=(0,-1,0)$，故曲线在点 $(1,-1,2)$ 处的切向量为 $(1,0,2)$，所以所求切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{2}$，法平面为：$x+2z-5=0.$

3.求函数 $u=x+e^x\sin(y-z)$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数.

解： u 在 A 的梯度为：$gradu=(1,e,-e)$，$\vec{l}^{\,0}=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)$，$\therefore \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_A=\dfrac{1+4e}{3}.$

4. 求函数 $z=x^2+xy+2y^2-x+3y+3$ 的极值.

解： 令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y-1=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x+4y+3=0, \end{cases}$，解得驻点为：$P_0(1,-1)$，又 $A=2,B=1,C=4$，$\Delta=-7$，$A>0$，所以 z 在 P_0 处取得极小值，极小值为 1，无极大值.

5. 计算二重积分 $I_1=\iint\limits_D |y+\sqrt{3}x|\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\le 1$.

解： 将积分区域 D：$x^2+y^2\le 1$ 用 $y+\sqrt{3}x=0$ 分成 2 个部分，在直线 $y+\sqrt{3}x=0$ 上方的部分记为 D_1，下方的部分记为 D_2. 则有

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(y+\sqrt{3}x)dxdy-\iint\limits_{D_2}(y+\sqrt{3}x)dxdy$$

$$=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_0^1(r\sin\theta+\sqrt{3}r\cos\theta)rdr-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr=\frac{8}{3}.$$

6．求三重积分 $I_2=\iiint\limits_{\Omega}e^{|y|}dxdydz$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le 1$ ．

解： 由对称性，$I_2=2\iiint\limits_{\Omega(y\ge 0)}e^{y}dxdydz$，由先二后一法，得

$$I_2=2\int_0^1 e^y dy\iint_{x^2+z^2\le 1-y^2}dxdz=2\int_0^1 e^y\pi(1-y^2)dy=2\pi e^y(2y-y^2-1)|_0^1=2\pi.$$

7. 求 $I_3=\int_C(x^2+y^2+z^2)ds$，其中 C 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的部分 .

解： $I_3=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}(a^2t+\frac{b^2t^3}{3})|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{a^2+b^2}(a^2+\frac{4b^2\pi^2}{3}).$

8. 求 $I_4=\int_C(x^2y+3xe^x)dx+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)dy$，其中 C 为摆线 $x=t-\sin t,$ $y=1-\cos t$ 从 $A(2\pi,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段弧 .

解：补上 $\overline{OA}:y=0,x:0\to 2\pi$，注意到 $P(x,y)=x^2y+3xe^x$, $Q(x,y)=\frac{1}{3}x^3-y\sin y,$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2=\frac{\partial P}{\partial y}$，由 Green 公式，$I_4=\int_{C+\overline{OA}-\overline{OA}}(x^2y+3xe^x)dx+(\frac{1}{3}x^3-y\sin y)dy$

$$I_4=-\int_{\overline{OA}}Pdx+Qdy=-\int_0^{2\pi}3xe^x dx=-3e^x(x-1)|_0^{2\pi}=3e^{2\pi}(1-2\pi)-3.$$

二、设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}\ ),(x,y)\ne(0,0),\\ 0, \qquad\qquad (x,y)\ne(0,0)\ .\end{cases}$ 试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性 .（12 分）

解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}\ )=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)=0=f(0,0)$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{|x|}\ln(1+|x|)}{x}=1.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-y}{|y|}\ln(1+|y|)}{y}=-1.$$

所以$f\left(x,y\right)$在$(0,0)$处可偏导.

记$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y=(x-y)[\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}-1]$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\omega}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)[\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}-1]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=\lim\limits_{r\to0+}\frac{r(\cos\theta-\sin\theta)(\ln(1+r)-r)}{r^2}=0.$　所以$f\left(x,y\right)$在$(0,0)$处可微.

三、求曲面$S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上的一点$P(x,y,z)$，使得由$P,A(a,0,0),B(0,b,0),$ $C(0,0,c)$构成的四面体体积最大．（10 分）

解：只需使得$P(x,y,z)$到ΔABC的距离最大. ΔABC所在的平面为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，故点$P$到$\Delta ABC$的距离的平方为：$\frac{f(x,y,z)}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$，其中$f(x,y,z)=(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1)^2$.

构造拉格朗日函数：$F(x,y,z,\lambda)=(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1)^2+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$，由下列方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{a}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{x}-1)+\frac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{b}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{x}-1)+\frac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2}{c}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{x}-1)+\frac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

得唯一驻点为$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$. 由几何意义，该问题一定存在最大值，驻点又唯一，故所求点为$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$.

四、求柱面$x^2+y^2=y$与球面$x^2+y^2+z^2=1$所围立体的体积与表面积.（12 分）

解：$V=4\iint_{x^2+y^2\le y}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}rdr$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}(\pi-\frac{4}{3}).$$

球面被柱面割下的曲面面积记为S_1，由曲面的形状，只要求出第一卦限的曲面面积乘

以 4 就可以. 此时曲面方程为：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$dS=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$,

$$S_1=4\iint_{x^2+y^2\le y(x\ge 0)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi-4.$$

柱面被球面割下的曲面面积记为S_2，由曲面的形状，只要求出第一卦限的曲面面积乘以 4 就可以. 此时曲面方程为：$x=\sqrt{y-y^2}$，$dS=\dfrac{1}{2\sqrt{y-y^2}}dydz$,

$$S_2=4\iint_{D_1}\frac{dydz}{2\sqrt{y-y^2}}=4\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y}}\frac{dz}{2\sqrt{y-y^2}}=4.$$

其中 $D_1:0\le z\le\sqrt{1-y},0\le y\le 1$. 所以所求曲面面积为：$2\pi$.

五、计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$，其中$\Omega$为$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x^2+y^2\le Rx$所围成的空间区域（其中$R>0$）．（10 分）

解：用先一后二法以及对称性和柱坐标，且Ω在xOy面的投影为：$x^2+y^2\le Rx$，所以有

$$I=2\iint_D dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}z^2dz=\frac{2}{3}\iint_D(R^2-x^2-y^2)^{3/2}dxdy$$

$$=\frac{4}{3}\iint_{D(y\ge 0)}(R^2-x^2-y^2)^{3/2}dxdy=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}(R^2-r^2)^{3/2}rdr$$

$$=\frac{4}{15}R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^5\theta)d\theta=\frac{2}{15}R^5(\pi-\frac{16}{15}).$$

六、设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，证明：$\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy\ge(b-a)^2$.其中积分区域为$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a,0\le y\le a\}$.（8 分）

证明： 由对称性$\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy=\iint_D e^{f(y)-f(x)}dxdy$，所以

$$\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy=\frac{1}{2}[\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy+\iint_D e^{f(y)-f(x)}dxdy]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)}]dxdy\ge\iint_D dxdy=(b-a)^2.$$