2016-2017 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2017.7.4

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

解：由 $\begin{cases} f_x = -(1+e^y)\sin x = 0; \\ f_y = e^y[\cos x - y - 1] = 0. \end{cases}$ 得驻点为：$P_1(2k\pi,0), P_2((2k-1)\pi,-2)$，$k\in Z$.

$f_{xx}=-(1+e^y)\cos x, f_{xy}=-e^y\sin x, f_{yy}=e^y[\cos x - y - 2]$,

对于 $P_1, A=-2, B=0, C=-1, B^2-AC=-2<0, A<0$，所以 P_1 是极大值点，极大值为 $f(P_1)=2.$

对于 $P_2, A=1+e^{-2}, B=0, C=-e^{-2}, B^2-AC=e^{-2}(1+e^{-2})>0,$ 所以 P_2 不是极值点.

2.讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$ 的敛散性 .

解：$f(x)=\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}, \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}=1.$ 所以由无穷区间广义积分的柯西判别法知原广义积分收敛.

3. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n+2}{n+1}\ (p\in R)$ 的收敛性.

解：$u_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n+2}{n+1}\sim\dfrac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$，由正项级数比较判别法的极限形式知，当 $\dfrac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时原级数收敛，$p\le 0$ 时原级数发散.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\dfrac{dy}{dx}=1$ 的通积分.

解：原方程可写为 $\dfrac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$，这是以 y 为自变量，x 为因变量的贝努利方程，所以把原方程化为：$\dfrac{dx^{-1}}{dy}+yx^{-1}=-y^3$. 此为关于函数为 x^{-1} 的一阶线性微分方程，由公式，得

$$x^{-1}=e^{-\int ydy}(C-\int y^3e^{\int ydy}dy)=e^{-\frac{y^2}{2}}(C-2e^{\frac{y^2}{2}}(\frac{y^2}{2}-1)).$$

所以所求通积分为：$x(e^{-\frac{y^2}{2}}C-y^2+2)=1.$

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

解： 令 $y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，将其代入方程得：$\frac{dp}{dx}=1+p^2$，

分离变量，得 $\frac{dp}{1+p^2}=dx$ ，两边积分，得 $\arctan p=x+C_1.$

即 $y'=p=\tan(x+C_1)$， 解得通解为：$y=-\ln|\cos(x+C_1|+C_2.$

二、（本题 10 分）计算 $I_1=\oint_C\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：（1）圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$；（2）闭曲线 $|x|+|y|=1$.

解：（1）$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 由格林公式得 $\oint_C\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$=0.

（2）加曲线 C_1： $x^2+y^2=\varepsilon^2\ (0<\varepsilon<0.5)$（顺时针）.

$$\oint_C\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\oint_{C+C_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-\oint_{C_1}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}\quad=-2\pi\ .$$

三.（本题 10 分）计算 $I_2=\oint_C\frac{y^2}{2}dx-xzdy+\frac{y^2}{2}dz$，其中 C 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\x+y=R.\end{cases}$ 若从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

解：由斯托克斯公式，得 $I=\iint_S(y+x)dydz-(y+z)dxdy, S:x=R-y.$

$$I=-R\iint_D dydz=-R\cdot\pi\cdot\tfrac{R}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{2}R}{2}=-\sqrt{2}\pi R^3/4.$$

四、（本题 10 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(z+1)^2dxdy$，其中有向曲面 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 取下侧.

解：取 Σ_{xoy} 为 xoy 面上的圆盘 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，方向取上侧，则

$$\iint_{\Sigma} xdydz+(z+1)^2dxdy$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_{xoy}} xdydz+(z+1)^2dxdy-\iint_{\Sigma_{xoy}} xdydz+(z+1)^2dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(2z+3)dv-\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi dr+3\cdot\frac{4\pi}{2\cdot 3}-\pi$$

$$=4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1 r^3dr+\pi=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}.$$

五、(本题 10 分) (**1**) 证明$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;(**2**)讨论数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$的收敛性,指明其是绝对收敛还是条件收敛并说明理由 .

解:(**1**) 设 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,

$$a_n^2=\frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1},\therefore\ a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(2)由于 $0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,所以 $a_n\to 0.\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1,$所以 $a_{n+1}<a_n$

因此由莱布尼茨判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛.

因为 $a_n=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$发散.

故原级数条件收敛.

六、(本题 **10** 分) 求数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$的和.

解:考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$,并设其和函数为$s(x)$,即$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$,对等式两边求积分,得$\int_0^{x}s(x)\,dx=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$=x$e^x$.再两边求导,得$s(x)=e^x(x+1)$.

所以$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=e^x(x+1), x\in R$. 令$x=2$，有$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)2^{n}}{n!}=3e^2$.

七、（本题 10 分）将函数 $f(x)=x\sin x$ 在$(-\pi,\pi)$内展开成傅里叶级数.

解：因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0.(n=1,2,\cdots,n,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin xdx=\frac{2}{\pi}[-x\cos x+\sin x]|_0^{\pi}=2;$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2xdx=\frac{1}{\pi}[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x]|_0^{\pi}=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$
$$=\frac{1}{\pi}[-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x+\frac{x}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x]|_0^{\pi}$$
$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}.(n=2,3,\cdots)$$

所以，$f(x)$的傅里叶级数为：

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x\ (-\pi<x<\pi).$$

八、（本题 10 分）(1)（非商学院的学生选做）设$f(x)$二阶连续可微，$g(x)$一阶连续可导，且满足：$f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，且$f(0)=0, g(0)=2$，计算

$$I_4=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx.$$

(2)（商学院的学生选做）设$f(x)=x^3+1-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$，求$f(x)$满足的微分方程并求$f(x)$.

解：(1)（非商学院的学生选做）

$$I_4=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{f'(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}.$$

由$f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$可以得到：$f''(x)+f(x)=2e^x$.

$f''(x)+f(x)=0$的通解是：$\bar{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，设$f''(x)+f(x)=2e^x$的特

解为：$f^*(x)=Ae^x$ 代人上述微分方程中，得 $A=1$. 所以 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 的通解为：$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$. 由 $f(0)=0, f'(0)=2$, 得 $C_1=-1, C_2=1$，所以 $f(x)=-\cos x+\sin x+e^x, f(\pi)=1+e^{\pi}$. 所以 $I_4=\dfrac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$.

（2）（商学院的学生选做）$f(x)$ 满足的微分方程是：$f''(x)+f(x)=6x$.

$f''(x)+f(x)=0$ 的通解是：$\overline{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$，设 $f''(x)+f(x)=6x$ 的特解为：$f^*(x)=Ax+B$ 代人上述微分方程中，得 $f^*(x)=6x$. 所以 $f''(x)+f(x)=6x$ 的通解为：$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+6x$. 由 $f(0)=1, f'(0)=0$, 得 $C_1=1, C_2=-6$，所以 $f(x)=\cos x-6\sin x+6x$.