2015-2016 学年第二学期第一层次微积分 II 期末考试试卷参考答案 2016.6.20

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）

1. 求二重极限：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

解： 因为 $0<\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}=0$，所以原式$=0$.

2. 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解： 对方程组两边同时求微分，得

$$\begin{cases}2udu-dv+xdy+ydx=0\\ du+2vdv+dx-dy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1}dx+\dfrac{1-2vx}{4uv+1}dy\\ dv=\dfrac{y-2u}{4uv+1}dx+\dfrac{2u+x}{4uv+1}dy\end{cases},$$

故有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 求证数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和.

解： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{2n-1}=\dfrac{1}{3}<1$. 由达朗贝尔判别法知原级数收敛.

$u_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}-\dfrac{n+1}{3^n},S_n=1-\dfrac{n+1}{3^n}\to1$. 所以原级数的和为 1.

4. 求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解.

解： 此方程为贝努利方程，所以把原方程化为：$\dfrac{dy^{-2}}{dx}+2y^{-2}=-2x$. 此为关于函数为 y^{-2} 的一阶线性微分方程，由公式，得 $y^{-2}=e^{-\int2dx}(C+\int(-2x)e^{\int2dx}dx)=Ce^{-2x}-x+\dfrac{1}{2}$.

5. 求微分方程 $yy''=(y')^2$ 满足初始条件 $\begin{cases} y(0)=1, \\ y'(0)=1 \end{cases}$ 的特解.

解：令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，将其代入方程得：$yp\dfrac{dp}{dy}=p^2$，

故 $y\dfrac{dp}{dy}=p$ 或 $p=0$（此时 $y=c$，不符合初值条件，故舍去）

由积分 $\int\dfrac{dp}{p}=\int\dfrac{dy}{y}+\ln C \Rightarrow \ln p=\ln Cy \Rightarrow p=Cy$，即 $\dfrac{dy}{dx}=Cy$．代入初值推得

$C=1$ 即 $\dfrac{dy}{dx}=y$

由积分 $\int\dfrac{dy}{y}=\int dx+C' \quad \Rightarrow \ln y=x+C' \Rightarrow y=C_1e^x$．代入初值推得 $y=e^x$.

二、(本题 10 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性.

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta}{r^2}=\lim\limits_{r\to0}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta=0$

$$=f(0,0)$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1,\quad f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y=\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-x \quad ，而$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\omega}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to0}\frac{r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta-r\cos\theta}{r}=-2\sin^2\theta\cos\theta$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、（本题 10 分） 求第一类曲面积分 $I_1=\iint_S x^2y^2dS$，

其中 S 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},x^2+y^2\le R^2$.

解：S 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\le R^2$. 又 $z'_x=\frac{-x}{z},z'_y=\frac{-y}{z}$，所以

$$dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$，这样我们得到

$$I_1=\iint_D x^2y^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}dr$$

$$=R\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=\frac{2}{15}\pi R^6.$$

其中 $\int_0^R\frac{r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 tdt=R^5\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}R^5$（令 $r=R\sin t$），

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}(1-\frac{3}{4})=\frac{\pi}{4}.$$

四、（本题 10 分）计算第二类曲面积分：

$I_2=\iint_S(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧（$a>0$，提示：利用 Gauss 公式）.

解： 补曲面 $S_1:z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 取下侧. 则 S 与 S_1 围成一个封闭曲面，取外侧，所围空间区域记为 Ω，于是

$$\text{原式}=\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_{1下}}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy=I_3+I_4$$

$$I_3=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=\frac{6\pi}{5}a^5,$$

$$I_4=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy=4a\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{\pi}{4}a^5$$

所以，原式 $=\frac{6\pi}{5}a^5+\frac{\pi}{4}a^5=\frac{29\pi}{20}a^5$.

五、（本题 10 分） 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的收敛性. 如果收敛，指出其是条件收敛还是绝对收敛？

解： $|u_n|=\frac{1}{(-1)^n+n}\sim\frac{1}{n}(n\geq 2)$，因为调和级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以由比较判别法的极限形式知道原级数不绝对收敛.

$u_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}=\frac{(-1)^n n}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-1}$，而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ 由莱布尼茨判别法知其收敛，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛，所以由收敛级数的性质知原级数收敛，故原级数条件收敛.

六、（本题 10 分） 求 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式.

解： 对给定函数求导数，得，$f'(x)=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ (|x|<1)$，$f(0)=0$，所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(|x|<1).$$

七、（本题 10 分）将函数 $f(x)=x\ (0\leq x\leq\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解： 将 $f(x)$ 进行偶延拓，则 $b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi，\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\ (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\ (-\pi\leq x\leq\pi)$$

令 $x=0$ 得：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

八、（本题 10 分）（1）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；(2) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

解 （1）令 $u_n(x)=\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{3(n+1)}}{(3n+3)!}}{\frac{x^{3n}}{(3n)!}}=0$ 得到，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）
$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$
$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$
$$S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$
得到微分方程 $\begin{cases}S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x\\ S(0)=1, S'(0)=0\end{cases}$

下面解该方程：特征方程为 $r^2+r+1=0$，其特征根为 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

故齐次方程通解为 $Y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]$，特解为 $y^*=\frac{1}{3}e^x$，

故原方程的通解为：$S(x)=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}e^x$

由初始条件 $S(0)=1$，$S'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=0$，所以

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x\ (-\infty<x<+\infty).$$