南京大学数学课程2014/2015微积分II(A)试卷参考解答 （第一层次修订）

一. 计算下列各题($11\times 5=55$分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ ($0<h<a$) 截出的顶部.

解: S 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\qquad (x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2-h^2\},$$

又

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

因此有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= a\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2).\end{aligned}$$

2.计算二重积分 $\iint\limits_D |\,y-x^2\,|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $|\,x\,|\le 1, 0\le y\le 2$.

解: 用曲线 $y=x^2$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分 其中

$$D_1=\{(x,y)\mid x^2\le y\le 2,-1\le x\le 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid 0\le y\le x^2,-1\le x\le 1\},$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint\limits_{D_1}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2(y-x^2)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}y^2-x^2y\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\left(x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^1\left(2-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{46}{15}.\end{aligned}$$

3.求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

解：记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$ 则

$$\boldsymbol{n}=(F'_x(1,1,1),F'_y(1,1,1),F'_z(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2),$$

于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

4. 判别 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 的敛散性,若收敛，计算其值。

解：$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u^2+2}=$ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

5. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

解：原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1},$$

因此这是一个齐次微分方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 则

$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u+1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-u}{u+1},$$

分离变量, 得

$$\Big(1+\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},(u\not\equiv 0)$$

两边积分, 得

$$u+\ln|u|+C=-\ln|x|,$$

所以原方程的通积分为:

$$\frac{y}{x}+\ln|y|+C=0.\ \ y=0\text{为奇解}.$$

6. 计算曲线积分 $\oint_{\widehat{OmAnO}}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 $\widehat{OmA}$ 为抛物线段 $y=x^2$, AnO 为直线段 $y=x$

解:

$$\begin{aligned}
&\oint_{\widehat{OmAnO}}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\\
&=\int_{\widehat{OmA}}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\int_{AnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1[2x\mathrm{arctan}x-1]\mathrm{d}x+\int_1^0(\mathrm{arctan}1-1)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 2x\mathrm{arctan}x\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x\\
&=x^2\mathrm{arctan}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}\\
&=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}=(\mathrm{arctan}x-x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-1.
\end{aligned}$$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n})$ 是否收敛, 如果收敛, 求其和.

解: $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\frac{1-1/3^n}{1-1/3}-\frac{7}{10}\frac{1-1/10^n}{1-1/10}\right)=-\frac{5}{18}$

8. 计算曲线积分 $\int_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑简单闭曲线，积分按逆时针方向进行.

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 $\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ 内成立,

所以 $\int_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{x^2+y^2=1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=2\pi.$

9. 求解微分方程 $(\mathrm{e}^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0.$

解:

$$e^x\sin y+2y\cos x=C.$$

10.讨论幂级数 $x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$ 的收敛域，并求其和函数.

解：先考虑幂级数的收敛域. 任取 $x \neq 0$ 令

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

这时有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^2 = x^2.$$

所以当 $|x| < 1$ 时幂级数收敛. 当 $|x| > 1$ 时, 幂级数发散.

当 $x = 1$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 此时级数收敛.

当 $x = -1$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 此时级数收敛.

因此, 收敛域为 $[-1,1]$. 设

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad x \in [-1,1]$$

$S(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导, 并且

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{2n+1} x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad (x \in (-1,1))$$

两边积分并注意到 $S(0) = 0$, 得

$$\begin{aligned} S(x) &= S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan x, \qquad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

又 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 因此

$$S(x) = \arctan x, \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

11.求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 的值(提示：可利用上题的结果). 解：在上题中令 $x = 1$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

二 (本题满分12分) 计算曲面积分 $\iint_S \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中曲面$S$ 为$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, $a>0$是一个常数.

$I = \iint_S \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{a}\iint_S ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

添加$S_1: z=0(x^2+y^2\le a^2)$ 的下侧，$I = \frac{1}{a}(\iint_{S+S_1} - \iint_{S_1})ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\iiint_\Omega a\mathrm{d}V + \frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{3}a^3 + \pi a^3 = \frac{5\pi}{3}a^3$.

三. (本题满分12分) 设函数$Q(x,y)$连续可微,曲线积分

$$\int_\Gamma 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

与积分路径无关, 且对一切实数都有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

求函数$Q(x,y)$.

解：令$P(x,y)=3x^2y$, 由积分与路径无关的充要条件，得$Q'_x = P'_y = 3x^2$. 故

$$Q(x,y) = x^3 + \phi(y),$$

由$Q'_x = P'_y$知存在$u(x,y)$ $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}x + (x^3+\phi(y)\mathrm{d}y$.

$$u(x,y) = \int_0^x 3x^2y\mathrm{d}x + \int_0^y \phi(y)\mathrm{d}y = x^3y + \int_0^y \phi(y)\mathrm{d}y,$$

$$u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(t,1)} = u(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)},$$

$$t^3 + \int_0^1 \phi(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t \phi(y)\mathrm{d}y,$$

$3t^2 = 1+\phi(t)$, $Q(x,y) = x^3+3y^2-1$.

四. (本题满分13分) 1,求函数$f(x)=x^2, (-\pi\le x\le\pi)$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶展开式.

2,求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$的和.

3,求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和.

解：(1),因为$f(x)$为偶函数，所以$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)dx=\frac{2}{3}\pi^2$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2)\cos nx dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},(n=1,2,\cdots)$.

因为$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 上连续，并且$f(-\pi)=f(\pi)$,

$f(x)=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx,(-\pi\le x\le\pi)$.

(2),在上式中令$x=0$, 得

$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

(3),令$x=\pi$, 得

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

五. 1,(本题非商学院的考生选做，满分8分）设$a_n>0,S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,(n=1,2,\cdots)$ 证明:(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛; (2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

2,(本题商学院的考生选做,满分8分）讨论当实数p 为何值时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-(1+\frac{1}{n})^n\right)^p$ 收敛, 实数p 为何值时,级数发散.

证明：1,(1).$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$.

$\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}<\frac{1}{S_1}+(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2})+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3})+\cdots+(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})=\frac{2}{a_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{a_1}$.

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2).

$$\sqrt{S_n}<\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_k}}<\frac{1}{\sqrt{a_1}}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{S_n}{\sqrt{a_1}}.$$

解：2.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{1/x}}{x}=\dfrac{e}{2}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-(1+\dfrac{1}{n})^n\right)^p$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$同敛散. 当$p>1$时,原级数收敛$p\le 1$, 原级数发散.